VAKidioot

Studievereniging A–Eskwadraat

Jaargang 11/12 Nummer 2

A-Eskwadraat

Kardinaal

In dit nummer

VAKartikelen / idiootartikelen

Colofon

datum uitgave: 21 november 2011
oplage: 1810
deadline volgend nummer:
11 december 2011

De Vakidioot *is een uitgave van:*
Studievereniging A–Eskwadraat
Princetonplein 5
3584 CC Utrecht
tel: (030) 253 4499
fax: (030) 253 5787
e-mail: `vakid@a-eskwadraat.nl`

redactie:
Adinda de Wit
Ans de Nijs
Barbera Droste
Chun Fei Lung
Darius Keijdener
Fiona van der Burgt
Jan de Wit
Peter Boot
Sjoerd Boersma

Met dank aan:
Bas Lommers
Eric van Dijk
Gijs Boosten
Jan Jitse Venselaar
Julian Lyczak
Karst Koymans
Koen Ekelschot
Marcel Scholten
Miekee Lam
Stefan Vandoren
Tom Hofstee
Twan van de Waerdt
ViCie
Yolanda Noorda

Redactioneel

De wiskundigen onder jullie zullen bij het zien van het thema van deze Vakidioot ongetwijfeld meteen aan het begrip 'kardinaliteit' hebben gedacht.
De niet-wiskundigen onder jullie dachten wellicht aan kardinaal Simonis, aan de paus of in ieder geval iets Rooms-Katholieks. Normaal gesproken heeft de voorpagina van doen met het thema, en zo ook dit keer. Toch? Wat doet die gekke trein dan op de voorkant? In de Verenigde Staten is de *Cardinal* een trein die drie keer per week van New York Pennsylvania Station naar Chicago Union Station rijdt. Dat is een rit van 1844 km die zo'n 28 uur duurt. Deze trein is op de voorkant afgebeeld (foto met dank aan Flickruser *jpmueller99*).

Als de Vakidioot net op je deurmat geploft is, dan is Sinterklaas als het goed is nog in het land. De goedheiligman – de naam zegt het al – is natuurlijk een heilige en dus ook een soort kardinaal. Wat toevallig! Daarom vind je in deze Vakidioot enkele Sinterklaasgerelateerde artikelen, met als hoogtepunt een interview met de kindervriend. Hoewel de Sint normaal gesproken geen interviews geeft aan tijdschriften wilde hij voor ons een uitzondering maken: je vindt zijn antwoord op onze vragen op pagina's 29 en 30.

Natuurlijk is er nog meer: zo hebben we artikelen over Ramsey-kardinalen, navigatie op zee, snelle neutrino's, objectgeoriënteerd programmeren, de excursie naar klinische fysica én een word-actief-flowchart. . .
Genoeg dus om je voorlopig niet te hoeven vervelen!
Veel leesplezier,

Adinda de Wit
Hoofdredacteur

Van de voorzitter

"$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$"

Zowel de kardinaliteit van de natuurlijke getallen als die van de reeële getallen is oneindig en toch zijn ze niet gelijk aan elkaar. Oneindig is dus niet een eenduidig begrip in de wiskunde. Oneindig is iets wat maar weinig mensen zich kunnen voorstellen. In het leven zoals wij het kennen zit overal een limiet aan, zelfs de afstand tot de sterren die oneindig lijkt is in kilometers of lichtjaren uit te drukken. Het verleden waarvan het lijkt dat je oneindig ver terug kunt gaan is eindig (mits je in de oerknal gelooft.) Alleen gevoelens kunnen oneindig lijken, bijvoorbeeld: wij blijven voor altijd vrienden. In het dagelijks leven heeft oneindig eigenlijk alleen betekenis bij gevoelens – in de wiskunde heeft dit duidelijk een hele andere betekenis.

Naast oneindig zijn er nog veel meer woorden die in de wiskunde of natuurkunde een andere betekenis hebben dan in de alledaagse taal. Zo denk ik nu aan continu, waarbij ik meteen denk aan een continue functie. Zou je mensen op straat vragen naar de betekenis van continu dan antwoorden zij waarschijnlijk: steeds voortdurend. Het woord discreet is ook een dergelijk voorbeeld wat in de wiskunde staat voor zaken die los van elkaar staan, terwijl in het woordenboek het vertaald staat als: in staat geheimen te bewaren. Zo kunnen er nog tal van woorden gevonden worden waarvan je er in de loop van je studie achter komt dat de betekenis van deze woorden heel anders kan zijn dan die in alledaagse taal.

Ook binnen A–Eskwadraat betekenen woorden of afkortingen vaak iets anders dan in de Nederlandse taal. Bekende voorbeelden zijn de VOC, wat binnen A–Eskwadraat de Vertaal en OmzetCommissie is, of de BTW die jaarlijks de introkrantjes maakt. Verder bestaan er nog veel meer afkortingen binnen A–Eskwadraat die samengevat zijn in het HAUD (Het Afkortingen Uitleg Document), wat te vinden is op de website.

Het blijkt wel dat woorden lang niet altijd een eenduidige betekenis hebben en dan hebben we het nog niet eens gehad over de interpretatie van de woorden. Kortom de discussie over woorden en betekenissen zal tot in de lengte van dagen gevoerd worden en een eenduidig antwoord zal er waarschijnlijk nooit komen.

Gijs Boosten

Neutrino's sneller dan het licht?

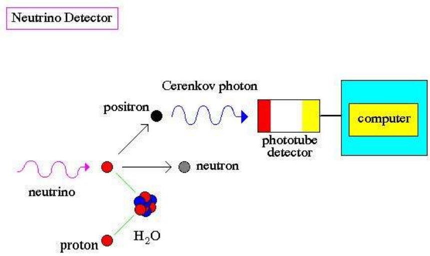
Door: Stefan Vandoren

Terwijl ik dit stukje schrijf, word ik gebombardeerd door miljarden neutrino's. Ze gaan dwars door me heen, maar ik voel het niet, zie het niet en hoor het niet. Het doet geen pijn. Dat geldt ook voor jou terwijl je dit leest. Onze aarde wordt voortdurend beschoten met neutrino's vanuit de zon en andere kosmische bronnen. Die neutrino's gaan dwars door de aarde heen, en we merken er helemaal niets van. Wat vreemd!

Neutrino's zijn elementaire deeltjes, en behoren tot de soort van "leptonen". Er zijn twee soorten van elementaire deeltjes waaruit alle materie is opgebouwd: quarks (die protonen en neutronen maken) en leptonen. De leptonen bestaan uit drie families van deeltjes: het elektron, het muon en het tau-deeltje. Bij elk van die drie hoort een neutrino: het elektron-neutrino, het muon-neutrino en het tau-neutrino. Er zijn dus zes leptonen, en samen met hun antideeltjes, twaalf.

De belangrijkste eigenschap van het neutrino is dat het bijna geen eigenschappen heeft! Neutrino's hebben geen elektrische lading, en voelen dus geen elektromagnetische krachten; ze zijn vrijwel massaloos – hun precieze massa's zijn overigens nog niet bekend – en voelen dus ook geen zwaartekracht. Daarom kunnen ze dwars door de aarde heen. De enige wisselwerking die ze ondergaan is met een atoomkern, via de zwakke kernkracht die we kennen van radioactief verval. Vreemd genoeg kunnen de drie neutrino's wel onderling van gedaante verwisselen. Een elektron-neutrino kan bijvoorbeeld veranderen in een muon-neutrino, of in een tau-neutrino, en omgekeerd. Dit fenomeen heet neutrino-oscillatie. Er wordt volop onderzoek gedaan naar die oscillaties, zoals bij het Super-Kamiokande-experiment in Japan, of bij het OPERA-experiment tussen CERN en Gran Sasso, waarover later meer.

Wanneer een neutron vervalt in een proton via radioactief verval, worden er elektronen en anti-neutrino's geproduceerd. Andersom kunnen protonen, wanneer ze beschoten worden met neutrino's, omgezet worden in neutronen en positronen, de antideeltjes van de elektronen. Een neutrinodetector bestaat daarom uit een grote en dichte hoeveelheid materie, en van de miljarden neutrino's die de detector ingaan, botsen er slechts enkele met een proton in een atoomkern. Hierdoor ontstaat een klein stralingsflitsje (Cerenkovstraling) dat gemeten kan worden, zoals in de afbeelding hieronder.

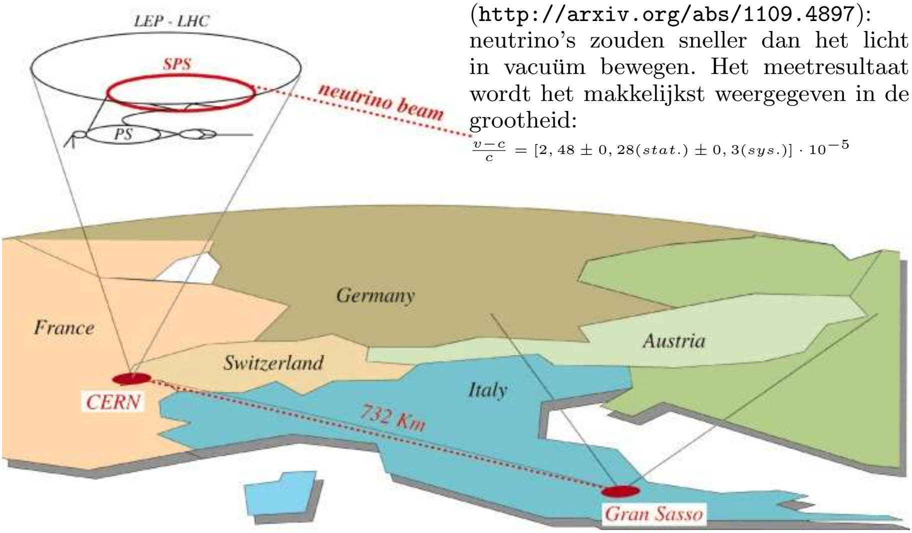


Figuur 1: Schematische weergave van een neutrinodetector. Dit soort detectoren staat vaak diep ondergronds, soms in een watertank, om afgeschermd te zijn van andere deeltjes uit kosmische straling die het aardoppervlak niet kunnen doordringen. De detector bij het OPERA-experiment zit echter niet in een watertank, maar in grote hoeveelheden dicht opeengepakt lood, zo'n 1300 ton. Het "OPERA-neutrino" is ook van de tau-familie, maar het principe blijft hetzelfde.

Het OPERA (Oscillation Project with Emulsion-tRacking Apparatus)-experiment doet onderzoek naar de eigenschappen van neutrino's, in het bijzonder naar neutrino-oscillaties en het detecteren van tau-neutrino's. In het CERN-laboratorium te Genève worden muon-neutrino's geproduceerd en gericht op een neutrinodetector zo'n 732 kilometer verder in Gran Sasso, in de Apennijnen van Centraal-Italië. De uiterst precieze tijdmeting die nodig is, is echter ingewikkeld,, omdat klokken in Gran Sasso en bij CERN heel nauwkeurig op elkaar afgesteld moeten worden. Hierbij worden GPS-satellietsystemen gebruikt in combinatie met geavanceerde meetmethodes met atoomklokken.

Op 23 september 2011, na maanden van verder onderzoek, twijfel en nervositeit, geeft OPERA zijn gegevens vrij (`http://arxiv.org/abs/1109.4897`): neutrino's zouden sneller dan het licht in vacuüm bewegen. Het meetresultaat wordt het makkelijkst weergegeven in de grootheid:

$\frac{v-c}{c} = [2,48 \pm 0,28(stat.) \pm 0,3(sys.)] \cdot 10^{-5}$



Figuur 2: Een bundel van neutrinodeeltjes wordt gemaakt in een van de kleinere versnellers in CERN in Genève. Die bundel wordt afgeschoten in de richting van een detector in Gran Sasso, 732 kilometer verderop.

In mei 2010 werd in Gran Sasso voor het eerst bevestigd dat een muon-neutrino kan veranderen in een tau-neutrino, een van de mogelijke oscillaties. Bijkomend wordt ook gemeten hoe lang het neutrino erover doet om van CERN naar Gran Sasso te vliegen. Aangezien neutrino's zich met ongeveer de lichtsnelheid voortbewegen, rekent men snel uit dat de reistijd CERN-Gran Sasso in de buurt ligt van een paar milliseconden. Andersom kan men uit het meten van de reistijd de snelheid van het neutrino bepalen. De dit wil zeggen, de snelheid v van de neutrino's is ongeveer 7 km/s groter dan die van het licht in vacuüm (c=299.792,458 km/s). De afwijking is dus ongeveer 20 delen in een miljoen. Het neutrino doet er over die afstand 60 nanoseconden minder over dan het licht.

De statistische (stat.) en systematische (sys.) onzekerheden zijn klein, de standaarddeviatie is 6 sigma; uiterst significant. De meetgegevens zijn gebaseerd op 15.000 neutrino-events die in de detector zijn waargenomen. De onzekerheid in de reistijd bedraagt niet meer dan ongeveer 10 nanoseconden, heel klein dus ten opzichte van de reistijd van ongeveer drie milliseconden. Op de afstand tussen CERN en de detector zit ook niet veel onzekerheid: hooguit 20 centimeter…

Het bestaan van deeltjes die sneller dan het licht bewegen is in tegenspraak met Einsteins speciale relativiteitstheorie. Enige nuancering is gepast: volgens Einstein kan geen deeltje versneld worden tot snelheden groter dan de lichtsnelheid. De postulaten van de relativiteitstheorie verbieden echter niet dat er deeltjes bestaan die altijd sneller dan het licht bewegen. Zulke deeltjes heten tachyonen. Men kan makkelijk laten zien dat zulke deeltjes voor sommige waarnemers terug in de tijd reizen. In ietwat vereenvoudigde termen: klokken die meebewegen met reizende deeltjes lopen langzamer dan wanneer in rust. Bij de lichtsnelheid staat de klok stil, en bij nog grotere snelheden lopen klokken achteruit.

In een wereld waarin klokken achteruit lopen, worden oorzaak en gevolg omgedraaid. In zo'n wereld kan je terugreizen in de tijd, en gaat het licht aan voordat de schakelaar is omgezet. In technische termen, een theorie met tachyonen is niet causaal. Niemand weet hoe zo'n theorie betekenisvol kan zijn, consistent kan zijn met wat we over de natuur weten en kunnen meten. Daarom verwerpen we het idee van tachyonen, en verbieden we elke theorie die niet causaal is. Als neutrino's sneller dan het licht kunnen reizen, is de relativiteitstheorie niet causaal, en dus accepteren we haar niet.

Een aantal wetenschappers stelt voor de relativiteitstheorie aan te passen of zelfs te vervangen door een nieuwe theorie, die in overeenstemming is met het OPERA-experiment. Er zijn tal van artikelen op het internet te vinden waar voorstellen gedaan worden hoe dit te doen. Het is ondertussen bijna niet meer bij te houden, en het ene idee vind ik al gekker dan het andere. Andere wetenschappers schrijven over mogelijke meetfouten in het experiment. Ook hier worden allerlei verschillende oorzaken aangereikt. Op het "Physics-arXiv" werd het OPERA-artikel al 98 keer geciteerd in één maand tijd! Voorlopig heb ik nog geen positieve reacties hierop gelezen van de wetenschappers verbonden aan het experiment.

Hoe moet het nu verder? Elk nauwkeurig experiment moet vanzelfsprekend serieus genomen worden, en het OPERA-experiment dus ook. Er moet gezocht blijven worden naar mogelijke oorzaken, eventuele instrumentele of statistische fouten. Eerdere experimenten over neutrinosnelheden bij lagere energieën vonden geen significante afwijkingen. Indien fouten zijn gemaakt, zullen we daar waarschijnlijk iets uit leren. Eventueel moet het experiment worden overgedaan, elders, en geheel onafhankelijk. Tot die tijd houd ik me alleszins nog aan de relativiteitstheorie, die door talloze experimenten met verbluffende precisie is bevestigd. Bij wijze van spreken, de stand is 100 tegen 1!

Beter onderwijs heb je zelf in de hand!

Als student heb je het vaak niet door, maar je bent in staat je eigen onderwijs te verbeteren door klachten door te geven en ideeën voor verbeteringen te noemen. Voor de verschillende departementen zijn er studenten die deze klachten verzamelen en doorgeven aan de juiste mensen binnen het departement en de faculteit. Ook kunnen zij je informeren over wat er op dit moment allemaal gebeurt binnen de universiteit.

SODI

SODI staat voor Studentenoverleg Departement Informatica, één keer per periode is er een overleg waarin studenten hun mening kunnen geven over de verschillende vakken en faciliteiten. 14 oktober was de eerste SODI-bijeenkomst van het huidige collegejaar. Behalve gezellig was het natuurlijk ook een nuttige bijeenkomst. Gelukkig werd er niet alleen geklaagd over volle collegezalen en hoge werkdruk, maar werden ook de positieve kanten van vakken aangestipt. Heb jij nog klachten of opmerkingen over vakken? Bezoek dan `www.SODI.nl`, neem contact op met Cindy Berghuizen of kom naar een SODI-bijeenkomst!

OGW

De OGW is nu bezig met wat kleine problemen oplossen, zoals het praten met een aantal docenten over bijvoorbeeld te korte pauzes of quizzen die niet aansluiten op de stof. Ook zijn er dingen meegenomen naar de OAC, en daar is besproken dat het absoluut niet netjes is om vlak voor aanvang van het collegejaar de roostering om te gooien, zoals dit jaar wel gebeurd is. Dus blijf naar de bijeenkomsten komen of mail naar science.ogw@uu.nl, dan kunnen we aan de slag met je problemen.

SONS

Het SONS, StudentenOverleg Natuur- en Sterrenkunde, organiseert iedere dinsdag in de middagpauze het DinsdagMiddagOverleg (DiMiO). Hier worden de aanwezigen op de hoogte gesteld van voor hen belangrijke lopende zaken in het departement en de faculteit, kunnen studenten al hun klachten kwijt en wordt iedere week een discussie gehouden over zaken waarmee studenten te maken hebben. Voorbeelden hiervan zijn de vernieuwing van de universiteitswebsite en het vakkenaanbod. Heb jij een klacht of opmerking als Natuurkundestudent? Ga naar het DiMiO, mail naar science.sons@uu.nl, loop langs de SONS-kamer in BBL 775 of neem contact op met Yassir Awwad, Fons van der Laan of Barbera Droste.

Profilering

Inmiddels is op 13 oktober het profiel Bèta 2015 vastgesteld. Wat dit betekent is in het kort al in de vorige Vakidioot beschreven. Het volledige document is te lezen op de site van Bèta 2015 [1], inloggen met je Solis-id. Mocht je hier vragen over hebben, spreek dan gerust Eveline Visee, Alexander Melchior of Barbera Droste aan, studentleden van de faculteitsraad, of Rob Wesselink, studentbestuurslid in het faculteitsbestuur.

[1] https://portal.services.uu.nl/beta/beta2015/Pages/Default.aspx

Navigation on sea and cardinal buoyage

You find yourself on a boat surrounded by water. Hopefully you're prepared, because there is no land in sight. How do you find your way to the nearest or a preferred harbor?

Fortunately we don't live in the fifteenth century anymore. Columbus had some nice tools to find his way, but had no idea what the shores he was sailing for would look like, or where they would be, since there were no maps of these undiscovered lands. Legend tells us that he actually miscalculated the distance to Asia and he and his crew would've starved to death if they hadn't encountered the New World. Columbus had access to compasses and several tools to determine his position on earth from the position of the stars. But again, if you don't know where you're going, knowing where you are is not that useful.

These days however, the difference is that the world is mapped; navigation has become much easier. The main question is now what method you prefer (or: how much money you are willing to spend), rather than whether it is possible to navigate your boat to your destination. Considering the large amounts of large (cargo) ships hauling the Earth these days, it's only safe that navigation has developed to modern standards. Colliding with oil tankers was something Columbus did not have to worry about.

Satellites

Satellite navigation is probably the best tool available. A GPS receiver[1] combined with a (digital or physical) map of the area you are sailing on is very useful, given that the map shows proper coordinates. You just read the coordinates the GPS receiver indicates, look on the map and find where you are. If you mark your position and the time on the map twice you can even see the direction you're going in, although many GPS receivers will also indicate the direction for you. Most seaworthy ships will have a GPS receiver these days, save for those few nuts who try to sail the sea like in the old times.

Radar

Another modern tool to locate and navigate your ship is radar. Radar is a bit older and particularly known as a tool for military purposes, as it appears in many Hollywood movies and has a board game based on it. A disadvantage of radar navigation is that it is only useful when other objects are within the range of the radar. When these other objects are fixed (such as land) you can determine your position. If they are not fixed or moving (such as ships) you can only find your relative position. If your navigational goal is just to avoid colliding with other ships, a radar is sufficient (although small ships may not be shown on your radar), but it will not show you the way on open sea.

[1] Similar systems are being developed by Europe (Galileo), China (COMPASS/BeiDou-2), and India (IRNSS), but are not operational yet. The Russian system GLONASS is functional, but is barely used for commercial purposes.

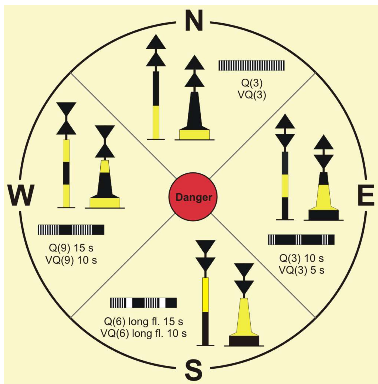
Vision

The more interesting navigation techniques are coming up, so if you're not a fan of technical stuff don't despair. A technique that is not to be underestimated is sight. It may sound trivial[2], but it is often even a better technique than all technical tools combined. Not that you shouldn't trust the technical tools – they are usually right – but sight has some great advantages. You can see the distance to land (although we assumed in the introduction there would be no land in sight, sorry for that) and other ships, but also whether you're on collision course with any of these. Again, sight should be combined with maps because it's usually not possible to see the depth of the water you're sailing on. For that there is also another tool: an echosounder that measures the depth. Unfortunately it only measures the depth on the place where you're already sailing, so it is not able to always warn you of sudden shallow grounds.

Cardinals

Just like roads, waterways have signs to tell you the maximum speed, priority rules and where you are. Floating signs (which are in particular useful when there is no land close to where the sign should be) are called buoyage, and can be subdivided into lateral and cardinal buoyage. Lateral buoys are usually in two colors: green and red, between which you are supposed to sail. Since the theme of this issue is 'cardinal', I will give some extra attention to cardinal buoyage.

If you encounter a cardinal buoy, you are supposed to sail around it, but only on one side, as it is warning you about danger. Usually this danger is shallow grounds on an unexpected place, but it can also be a shipwreck. The cardinals are yellow and black (see picture), and two black triangles on top of them tell you on which side to pass them. Two triangles with a point up means north, both down means south, two triangles pointing at each other west and two triangles with a side to one another means east. So you could still use a compass to see where the north is. On many occasions four cardinals will float on four sides of a dangerous site, and it is clear you should sail around it. During night cardinal buoys (as well as lateral buoys) give a light signal. Each buoy has its own light signal, so you can distinguish between them.



Cardinal marks

Sjoerd Boersma

[2]which is the theme of the next issue of Vakidioot

Datatypes
Voor je ouders

Door: Jan de Wit

We zijn allemaal wel bekend met de verschillende soorten bestanden die je op een computer kunt hebben staan. Zo zijn er bijvoorbeeld tekstbestanden, videobestanden, programma's en afbeeldingen. Als we kijken naar databases - verzamelingen van gegevens - en de interne werking van programma's, zien we een soortgelijke onderverdeling in data. Dit is echter op een nog specifieker niveau. Zo wordt er bijvoorbeeld al onderscheid gemaakt tussen getallen en tekst. Om getallen op te slaan worden vaak ook nog verschillende datatypes gehanteerd, afhankelijk van de aanwezigheid van kommagetallen en de mogelijkheid om negatieve waarden te bevatten. Het is bij programmeertalen vaak mogelijk om als programmeur zelf datatypes aan te maken gebaseerd op (een combinatie van) bestaande types. Op datatypes kunnen handelingen verricht worden, van simpele berekeningen zoals het optellen van getallen tot complexe algoritmes. Vaak worden deze handelingen verricht op verzamelingen van data, waarbij de omvang van de verzameling - de cardinaliteit - invloed heeft op de snelheid van een handeling.

Het is bij programmeertalen vaak mogelijk om als programmeur zelf datatypes aan te maken gebaseerd op (een combinatie van) bestaande types.

Maar als uiteindelijk toch alles in enen en nullen verandert binnen een computer, waarom dan moeilijk doen met deze datatypes? Het belangrijkste aspect is dat tijdens het ontwikkelen van het programma al bekend is wat voor type data bewaard wordt. Dit is met name handig bij het uitvoeren van handelingen op deze data, er kan dan namelijk vooraf al gecontroleerd worden of die handeling wel mogelijk is op dat bewuste datatype. De handeling kan ook verschillen per datatype, zo zullen we bij het optellen van twee getallen waarschijnlijk de som verwachten, terwijl we bij het optellen van tekst misschien een zin willen opbouwen.

In veel gevallen zal een programmeertaal van de programmeur verlangen dat aangegeven wordt om wat voor datatype het gaat. Dit gebeurt vaak bij de eerste keer dat de data nodig is, wanneer er ook een stuk geheugen voor opslag gereserveerd wordt. Het type hoeft niet altijd bekend te zijn: er bestaan ook programmeertalen die geen type aannemen maar dit afleiden uit de toewijzing. Je zou in dat geval dus een getal op kunnen slaan in het geheugen en vervolgens besluiten om hier toch maar wat tekst aan toe te kennen. Dit is natuurlijk gevoeliger voor een foute of onverwachte werking, zeker wanneer er door meerdere programmeurs aan een programma gewerkt wordt.

Een speciaal datatype is de *verzameling*. Deze kan namelijk een set van de *primitieve* datatypes als getallen of tekst vasthouden. In veel gevallen zal het type van de onderdelen van de verzameling wel gelijk moeten zijn, zoals een verzameling van alleen getallen. Deze verzamelingen bieden vaak manieren om nieuwe onderdelen toe te voegen, onderdelen te verwijderen of vervangen en onderdelen op te zoeken: via een positienummer of via een bepaald kenmerk. Er is een groot aantal verschillende structuren waarin een verzameling opgeslagen kan worden. Het kiezen van de beste structuur is afhankelijk van het beoogde doel. Er zijn bijvoorbeeld structuren die snel te doorzoeken zijn, maar waarbij het doorlopen van alle onderdelen lang duurt, of structuren waarin het zoeken van een waarde lang duurt, maar het ophalen aan de hand van een index wel weer snel is.

Het aantal onderdelen dat in een verzameling zit, de *kardinaliteit*, is van groot belang voor de werking van een programma. Worden de verzamelingen omvangrijk, dan kan de rekentijd die nodig is om bepaalde handelingen met de verzameling te verrichten aardig oplopen. Om een idee te krijgen van de snelheid van een bepaalde handeling, is de *big-O-notatie* bedacht. Dit is een indicatie van de toename van rekentijd wanneer de grootte van een verzameling toeneemt, onafhankelijk van het gebruikte computersysteem. Het vertelt je dus geen precies aantal seconden, maar geeft de groei van de rekentijd aan. Duurt een handeling bijvoorbeeld $O(n)$, dan verhoudt de benodigde tijd zich lineair tot het aantal onderdelen in de verzameling n. Een handeling die $O(n^2)$ is zal dus veel sneller vertragingen op gaan leveren dan de handeling van $O(n)$, omdat deze zich kwadratisch verhoudt tot het aantal onderdelen in de verzameling.

Op bewerkingen op een verzameling als zoeken, toevoegen en verwijderen kunnen we ook een big-O-notatie toekennen. Hierbij wordt rekening gehouden met de *worst case*. Stel dat ik geen idee heb waar een onderdeel van mijn verzameling staat en deze verzameling is op geen enkele wijze gesorteerd, dan zal ik ieder onderdeel moeten bekijken om te zien of deze gelijk is aan het onderdeel dat ik zoek. In het ergste geval staat het gewenste onderdeel achteraan of is het überhaupt niet aanwezig, dus hebben we alle onderdelen gehad: $O(n)$!
Is de verzameling wel gesorteerd, dan zijn er snellere manieren om uit te zoeken of een bepaalde waarde wel of niet voorkomt. Het sorteren zelf kost echter ook tijd, zelfs wanneer hier rekening mee wordt gehouden door nieuwe onderdelen meteen op de juiste plaats in te voegen. Bij zowel verzamelingen als primitieve datatypes geldt dus dat het zinnig is om alle opties af te wegen alvorens te kiezen voor een type.

Naast meer rekentijd bij het uitvoeren van handelingen is er bij een toenemende kardinaliteit van een verzameling ook meer opslagruimte nodig. Behalve rekening te houden met de “big O” bij het uitvoeren van handelingen op de verzameling is het daarom ook nuttig om manieren te zoeken om de kardinaliteit zo laag mogelijk te houden. In veel vakgebieden wordt daarom geprobeerd om, bij voorkeur automatisch, de onderscheidende kenmerken van een groter geheel te destilleren. Dit kan bijvoorbeeld bij een afbeelding. Afbeeldingen hebben een hoge kardinaliteit, omdat voor iedere pixel een rood-groen-blauw-waarde opgeslagen moet worden. En een gemiddelde foto heeft tegenwoordig nogal wat pixels! Het aantal opgeslagen waarden kan dan verminderd worden door de afbeelding te verkleinen, door het aantal mogelijke kleuren te verminderen of door alleen met grijstinten te werken. Dit principe geldt voor veel soorten bestanden en zo worden er steeds meer algoritmes bedacht om de omvang van data te verkleinen. Denk bijvoorbeeld aan het omzetten van een muziekopname naar het veel kleinere formaat MP3.

Pumpkin salad "spiced" up

With Sinterklaas, our great friend, currently residing in the Netherlands, surely if you have a sweet tooth, you must be over the moon. However, because the Sinterklaas sweets have been for sale since before the previous Vakidioot landed on your door mat, the chocolate letters, marzipan, chocolate coins, pepernoten and speculaas may have started to bore you. Therefore, the Vakidioot is glad to present to you a way of incorporating kruidnoten in your (hearty!) December 5th evening meal [1]

For 2-3 servings you will need:

- One pumpkin
- A bag of rocket salad
- A baguette, or another type of bread
- A small bag of kruidnoten
- Some olive oil

Enjoy!

Preparation:

- Heat the olive oil in a frying pan. In the meantime, remove the seeds and skin from the pumpkin (watch your fingers!) and cut the pumpkin into small pieces.
- Add the pumpkin pieces to the pan and pan fry them until they are soft.
- Line 2-3 plates with rocket salad and cover them with the pumpkin pieces.
- As a final step, cover the pumpkin and rocket salad with as many kruidnoten as you like.
- Serve with the baguette (or other bread) and enjoy! (While ignoring your housemates' puzzled faces)

Adinda de Wit

[1] Also edible on other cold autumn/winter evenings, naturally

Gedicht

Te midden van een kathedraal
zat een eenzame kardinaal
die bad: 'Hoe komt het dat ik faal
wanneer ik mensen hier onthaal?'

Ik draag mijn vloek, mijn plicht, mijn kwaal
Ik bid tot U, bij ieder maal
En wanneer men komt, zeg ik: 'Betaal!
contant, natura of giraal.
Slechts dan spreekt Hij in onze taal
de boodschap van het avondmaal'

De reactie van de Heer was kolossaal
en in Zijn hart klonk het driemaal:

'Bedenk je dat God slechts daar neerdaalt
waar men met liefde wordt onthaald.
Ongeacht wat men betaalt,
men Hem al vond, of is verdwaald.
Oftewel (wat vrij vertaald)
zorg dat de Kerk liefde uitstraalt!'

E.D.

King Arthur's Web

Door: Koen Ekelschot & Twan van de Waerdt

Voor hun bacheloronderzoeksproject zijn informatiekundestudenten Koen en Twan in de wereld van databases en middeleeuwse literatuur gedoken. Misschien vraag je je af hoe je aan zo'n combinatie komt. Hier doen Koen en Twan hun verhaal over hoe het project ze is vergaan.

In de periode tussen 2004 en 2008 heeft de faculteit Geesteswetenschappen van de Universiteit Utrecht een groot aantal gegevens over middeleeuwse Arthurliteratuur vastgelegd in twee databases. Eén van deze databases bevat gegevens over circa 250 romans: middeleeuwse verhalen over koning Arthur. De tweede database bevat gegevens over circa 1150 handgeschreven boeken welke handgeschreven afschriften van de romans bevatten. Deze bronnen van gegevens bieden een schat aan informatie voor onder meer de Arthuronderzoekers, verenigd in de International Arthurian Society.

Het probleem was echter dat de gegevens op dat moment niet toegankelijk waren gemaakt voor deze onderzoekers. Daarnaast was er geen sprake van een gestructureerde relatie tussen de beide databases. Het doel van de bachelorscriptie was dan ook het samenvoegen van de databases tot één gestructureerd geheel, zodat de gegevens op den duur op een toegankelijke wijze openbaar gemaakt kunnen worden.

Aangezien beide databases voldoende raakvlakken hadden, was het mogelijk om de databases tot één geheel om te vormen. Dit kon echter niet zonder slag of stoot gebeuren: gegevens over bijvoorbeeld de schrijvers van een verhaal waren opgenomen bij alle verhalen die ze hadden geschreven, wat leidde tot een grote hoeveelheid gegevens welke vaak niet eenduidig waren. Zo kon het geboortejaar wel eens verschillen, evenals het land van herkomst (grenzen veranderden regelmatig). Een andere uitdaging was dat de gegevens afkomstig waren van meerdere onderzoekers welke allemaal hun eigen notaties gebruikten. Een voorbeeld hiervan is het dialect waarin een verhaal was geschreven. De ene onderzoeker duidde dit aan met "Bairisch-ost" en de ander met "Bairisch-Österreichisch". Dit moest dus gestandaardiseerd worden, wat betekende dat er een grondige analyse gedaan moest worden, en er veel overleg benodigd was.

Uiteindelijk zijn de beide databases succesvol samengevoegd tot één relationeel gestructureerd geheel, en is een voorstel gedaan voor een website die deze gegevens zou kunnen ontsluiten naar andere onderzoekers. Dit omvatte zowel de functionaliteit voor de gebruikers als de technische eisen voor de website.

Het interessante aan deze scriptie was het werken binnen een voor ons nagenoeg onbekend vakgebied. Om tot een goed begrip van het daar gebruikte jargon te komen was het belangrijk om veel vragen te stellen. Anderzijds moesten we ook in staat zijn om het jargon van informatiekundigen begrijpelijk uit te leggen aan anderen.

Hefbomen

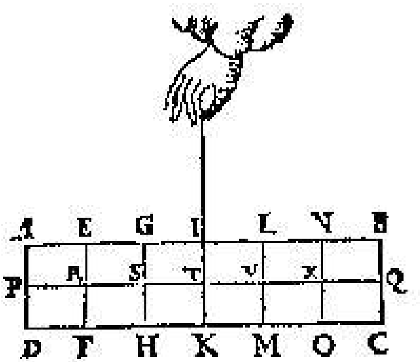
Door: Marcel Scholten & Tom Hofstee

De term kardinaal is afgeleid van het Latijnse *cardo* dat 'scharnier' betekent. Een rechtgeaard natuurkundige kan dan maar aan één ding denken: hefbomen. Een werktuig dat al sinds mensenheugenis wordt gebruikt om van de grootste lasten een kleine moeite te maken. Hefbomen zijn niet weg te denken uit de moderne beschaving. Denk bijvoorbeeld aan hijskranen om het huis te bouwen waarin dit artikel is geschreven, een relais in de laptop waarmee dit artikel is geschreven of alle hefbomen in de pers waarmee deze Vakidioot is gedrukt.

Archimedes

Hefbomen worden al eeuwen door de mensheid gebruikt, bijvoorbeeld om pyramides te bouwen. Archimedes echter was de eerste die er berekeningen mee uitvoerde; hij is ook degene die de hefboomwet heeft ontdekt. Van hem is ook de uitspraak: *'Geef me een plaats om te staan en een hefboom, en ik verplaats de Aarde.'* Mocht je dit in je vrije tijd willen uitproberen, dan hoop ik dat je niet al te praktisch ingesteld bent. Je moet namelijk eerst een steunpunt vinden voor je hefboom. Stel, je weet die te maken op 1 meter van het zwaartepunt van de Aarde en je massa is 70 kg, dan moet je een hefboom hebben die lang genoeg is om met die parameters $5,9721986 \cdot 10^{24}$ kg (1 aardmassa) te verplaatsen. Je mechanische voordeel moet dus $\frac{5,9721986 \cdot 10^{24}}{70} = 8,5317122 \cdot 10^{22}$ zijn. Je hefboom moet dus ook zo lang zijn (omdat je een steunpunt voor je hefboom hebt gevonden op 1 meter van het zwaartepunt van de Aarde). Dit is 2,76 Mpc, 90 keer de diameter van het melkwegstelsel, of voor de minder astronomisch onderlegden, 9 miljoen lichtjaar. Hierdoor wordt een bijkomend praktisch probleem dat je iets meer dan $9 \cdot 10^{6}$ jaar moet wachten voordat de informatie die je aan de ene kant van de hefboom verzendt de Aarde bereikt.

Stevin en de Weegkunde



Figuur 1: Illustratie bij Stevins afleiding van de hefboomwet

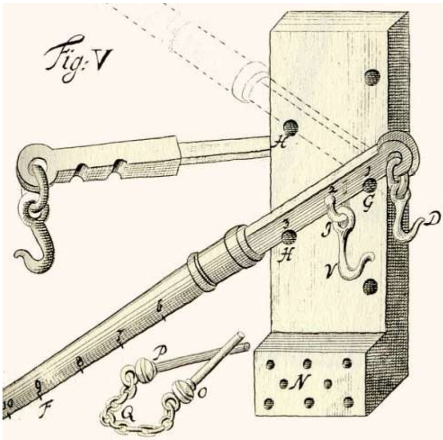
De volgende belangrijke bijdrage aan het begrip van hefbomen leverde de Nederlandse ingenieur Simon Stevin (1548-1620). Waar Aristoteles de wet traditioneel verkeerd afleidde (door te stellen dat gewicht maal snelheid gelijk is aan kracht), en Archimedes het wiskundig afleidde, was Stevin de eerste die het uitlegde op een manier die voor iedereen begrijpelijk was. In zijn standaardwerk "De Beghinselen der Weeghconst" uit 1586 zet hij zijn ideeën over de weegkunde (wat voor Stevin net zoiets was als meetkunde of rekenkunde) uiteen. Hij gebruikt hiervoor eenvoudige concepten zoals zwaartepunten. Centraal in zijn argumentatie neemt hij een balk die hij boven zijn zwaartepunt ophangt die hij vervolgens opdeelt in twee deelbalken met ieder een zwaartepunt en dus een zekere afstand tot het draaipunt. Een voorbeeldje, zie ook Figuur 1.

Ghegheven.
Laet ABCD een pilaer sijn weghende 6 pond welcke ghedeelt sy in 6 euen(gelijke) deelen, door platten (lijnen) euewydich van sijn grondt AD, als EF, GH, IK, LM, NO, sniende den as PQ in R, S, T, V, X: Laet ons nu nemen LMDA voor de swaerste swaerheydt, wiens swaerheyts middelpunt is S, ende LMCB voor de lichtste swaerheydt, wiens swaerheyts middelpunt is X, ende SX is dier deelen balck (...), ende T is t'swaerheyts middelpunt des heelen pilaers, ende TI d'hanthaef, waer an LMDA ende LMCB evestaltwichtich hangen, ende TX is den langsten erm, ende TS den cortsten(...).

'T begheerde.
Wy moeten bewysen dat ghelijck de swaerste swaerheydt LMDA, tot de lichtste LMCB, also den langsten erm TX, tot den cortsten TS.

'T Bewiis.
De swaerste swaerheydt LMDA weeght 4 pond, ende de lichtste LMCB 2 pond, ende den langsten erm TX heeft sulcken reden(verhouding) tot de cortste TS, ghelijck 2 tot 1 door t'ghegheven: Maer ghelijck 4 tot 2, alsoo 2 tot 1, ghelijck dan de swaerste swaerheydt LMDA, tot de lichtste LMCB, also den langsten erm TX, tot den cortsten TS.

Dit is natuurlijk nog geen bewijs, maar dat realiseert Stevin zich ook en verderop geeft hij een bewijs dat wiskundig wel kan bekoren – dit is echter iets lastiger te volgen.



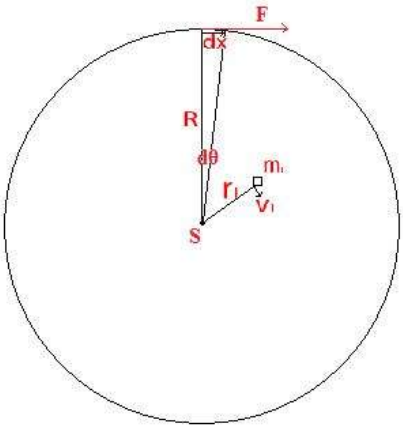
Figuur 2: Schematische weergave van de Heblade

Heblade

Een probleem met hefbomen was echter dat hoe zwaarder de last was, hoe langer de hefboom moest zijn en daarmee hoe minder ver de last werd verplaatst. Na elk stukje verplaatsen moest ook de hefboom weer verplaatst worden. In 1725 kwam Jacob Leupold met een oplossing voor dat probleem in zijn Theatrum Machinarum. Zijn oplossing heet de 'heblade' en is een blok hout met twee versprongen rijen gaten en twee pinnen. In de hefboom zijn twee uitsparingen gemaakt. Als je een last wilt optillen zet je een pin in de kolom het verst van de last en daar leg je de hefboom zo op dat ook de uitsparing die het verst van de last is op de pin ligt. Dan duw je de hefboom naar beneden totdat de andere uitsparing achter een gat van de andere kolom komt te liggen. Dan doe je daar de andere pin door en haal je de eerste weer weg. Nu duw je de hefboom weer omhoog. De last gaat hierbij minder ver naar beneden omdat het draaipunt nu dichter bij de last ligt. Nu doe je de eerste pin weer in de verste kolom maar een gat hoger. Dit doe je net zolang totdat je de last op de gewenste hoogste hebt.

Theorie

Bij een hefboom is het de bedoeling dat er iets draait. De theorie achter hefbomen is dan ook de rotatiemechanica. Voor niet-natuurkundigen een simpele afleiding van de hefboomwet:
We nemen een draaiend voorwerp, in dit geval even de cilinder in Figuur 3. Een hefboom is dit niet, maar later blijkt dat niet uit te maken. Het geval met deze cilinder is echter makkelijker te begrijpen. Belangrijk bij rotatiemechanica is dat alle punten in dezelfde tijd om de as draaien en dus dezelfde hoeksnelheid ω hebben Als de cilinder draait krijgt hij kinetische energie. Deze is gelijk aan de energie van alle deelstukjes samen, dus geldt:



Figuur 3: Roterend voorwerp waarop een kracht uitgeoefend wordt.

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 R_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum (m_i R_i^2) \omega^2 = I\omega^2 \end{aligned} \quad (1)$$

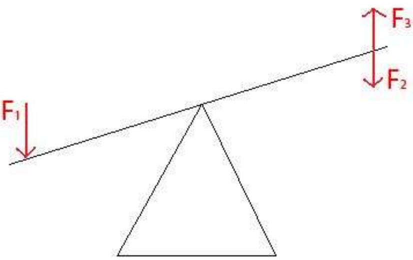
Hierin is I een eigenschap die alleen van het voorwerp afhangt en niet van de beweging. Deze staat bekend als het traagheidsmoment en speelt in de rotatiemechanica dezelfde rol als massa in de translatiemechanica. Verder weten we dat:

$$\vec{F} \cdot \vec{dx} = K \quad (2)$$

Nu volgt een beetje wiskundig gegoochel:

$$\begin{aligned} F \cdot (R \times d\theta) &= \frac{1}{2} I\omega^2 \\ \frac{d}{d\theta}(F \cdot (R \times d\theta)) &= \frac{d}{d\theta}\frac{1}{2} I\omega^2 \\ F \times R = I\frac{d}{d\theta}\frac{1}{2}\omega^2 &= I\frac{d}{d\theta}\omega d\omega \\ = I\frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}d\omega &= I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

Hierin is α de hoekversnelling. Deze heeft in de rotatiemechanica eenzelfde rol als de versnelling in de translatiemechanica. De grootheid $F \times R$ staat bekend als krachtmoment met symbool τ.



Figuur 4: Een hefboom waarbij we kracht willen uitoefenen

Laten we nu onze nieuwe wet toepassen op de hefboom in Figuur 4. Als de hefboom beweegt is dit hooguit met een constante snelheid, dus α is nul en dus moet $\sum \tau$ ook nul zijn.

Dan geldt de hefboomwet:

$\tau_{linksom} = \tau_{rechtsom}$

Dat betekent:

$F_1 R_1 = F_2 R_2$

Vanwege de derde wet van Newton is F_2 gelijk aan F_3, en R_2 is logischerwijs gelijk aan R_3, dus geldt ook:

$F_1R_1 = F_3R_3$

We hebben nu ons doel bereikt. Door een kleine kracht (F_1) uit te oefenen op een hefboom, kun je een grote kracht (F_3) uitoefenen op een ander voorwerp.

Typen hefbomen

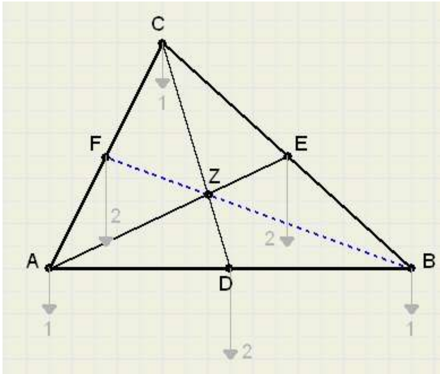
Technisch gezien zijn er drie typen hefbomen mogelijk. In de eerste en belangrijkste soort bevindt het draaipunt zich tussen de twee krachten. Voorbeelden hiervan zijn een wip of een koevoet. Een type dat ook vaak voorkomt, maar niet vaak zo herkend wordt is het tweede type. Hier bevindt zich het draaipunt aan de buitenkant evenals de uitgeoefende kracht. Hierdoor wordt de kracht dus vergroot. Voorbeelden hiervan zijn kruiwagens en een notenkraker. Het derde type lijkt op het tweede, maar hier bevindt de uitgeoefende kracht zich aan de binnenkant, zodat de kracht wordt verkleind. Dit is bijvoorbeeld handig in een pincet.

Meetkunde

Wie denkt dat hefbomen alleen maar geschikt zijn om zware voorwerpen zoals de Aarde op te tillen heeft het fout. Je kan namelijk door hefbomen op een slimme manier te gebruiken ook allerlei meetkundige problemen oplossen. Een meetkundige stelling is:

De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt en verdelen elkaar in de verhouding 2:1 gerekend vanuit een hoekpunt.

Je kunt alle lijnstukken van de driehoek ABC en de bijbehorende zwaartelijnen allemaal zien als een stelsel van hefbomen (in evenwicht), zie ook Figuur 5.



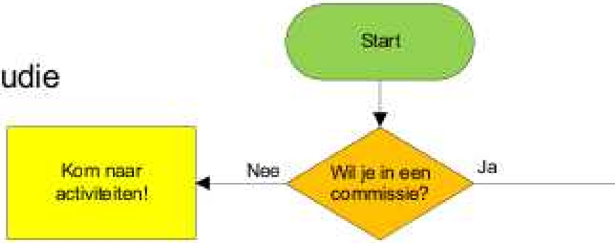
Figuur 5: Driehoek ABC

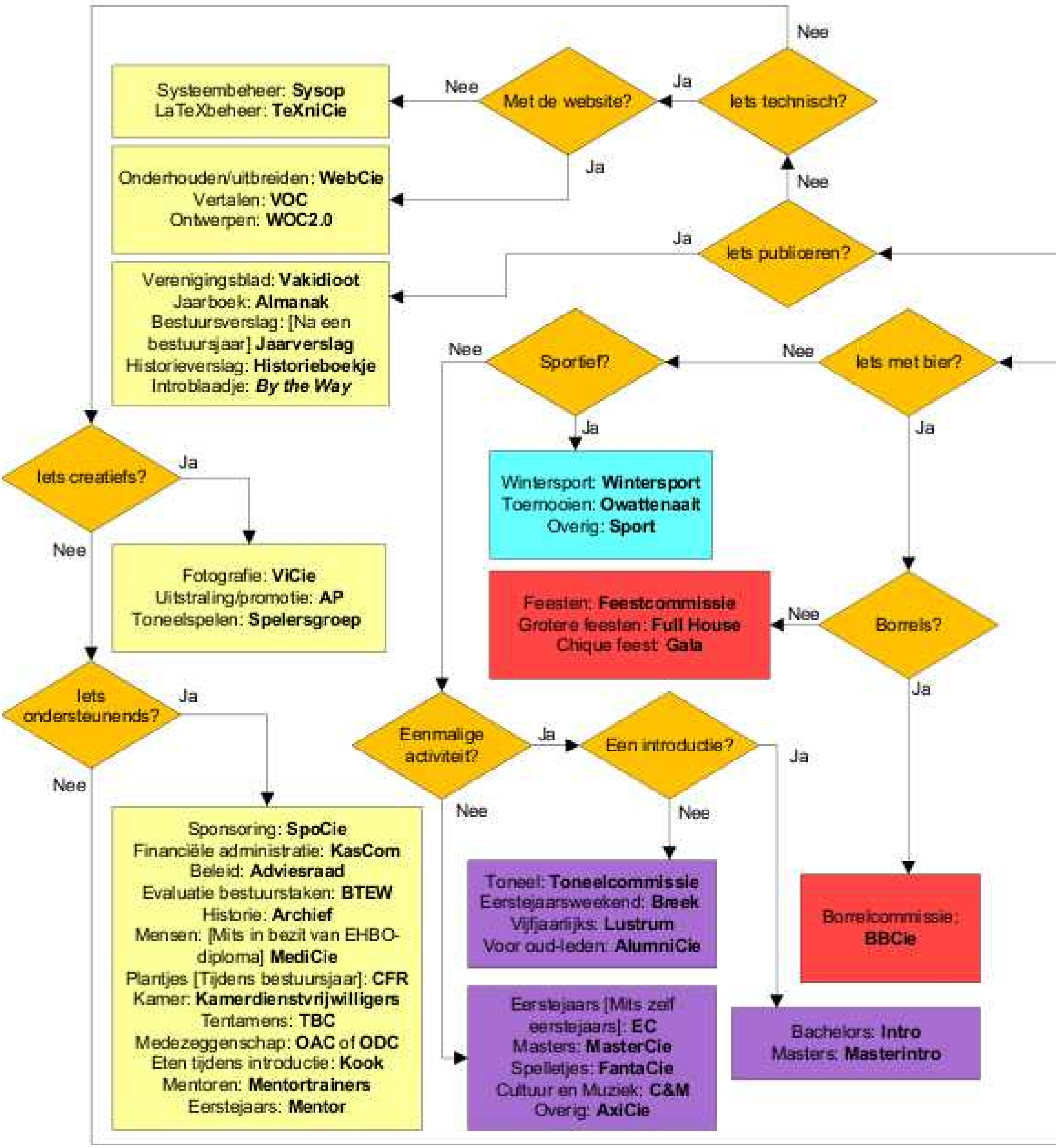
Hierbij is D bijvoorbeeld het steunpunt van hefboom AB. Als in A een kracht met grootte 1 werkt moet in B ook een kracht met grootte 1 werken, omdat de hefboom AB in evenwicht is en $AD = DB$. De totale kracht op het steunpunt D is dus 2. Op dezelfde manier is ook gemakkelijk in te zien dat in steunpunten E en F een kracht van grootte 2 werkt. We beschouwen nu het snijpunt van de zwaartelijnen Z als het steunpunt van de hefboom AE. Door nu weer de hefboomwet toe te passen zien we dat $AZ : ZE = F_E : F_A = 2 : 1$. Dit kunnen we ook voor de andere zwaartelijnen op dezelfde manier doen en zo hebben we vanuit de natuurkunde bovenstaande stelling aangetoond.

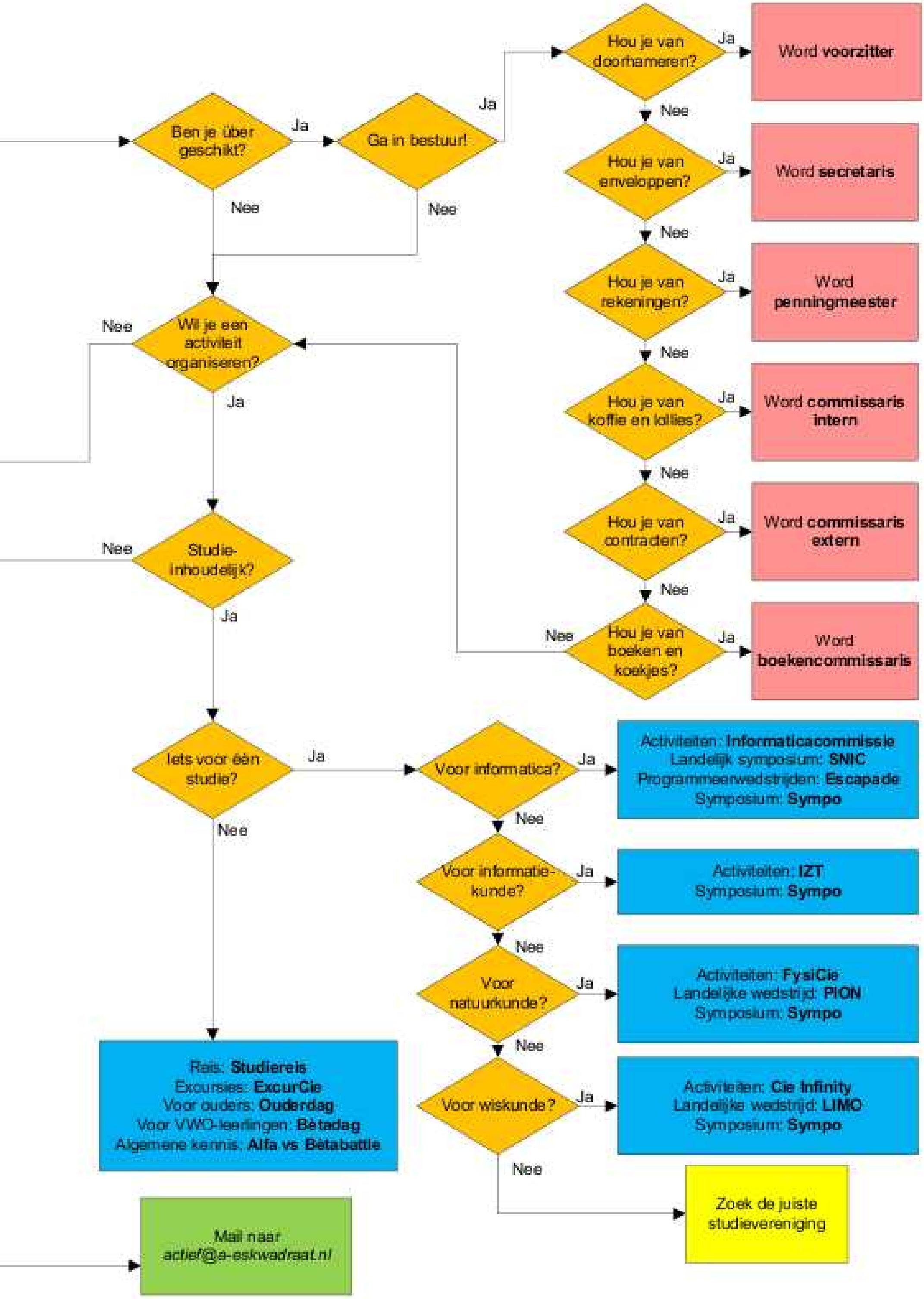
De word-actief-flowchart

O.d.z. Gezelligheid naast je studie

Ben jij geïnteresseerd om een commissie van A-Eskwadraat te komen versterken? Volg dan deze flowchart en zie welke commissie voor jou het meest geschikt is!






Ben je über geschikt?
Ja
Nee
Ga in bestuur!
Ja
Nee
Hou je van doorhameren?
Ja
Word **voorzitter**
Nee
Hou je van enveloppen?
Ja
Word **secretaris**
Nee
Hou je van rekeningen?
Ja
Word **penningmeester**
Nee
Hou je van koffie en lollies?
Ja
Word **commissaris intern**
Nee
Hou je van contracten?
Ja
Word **commissaris extern**
Nee
Hou je van boeken en koekjes?
Ja
Word **boekencommissaris**
Nee
Wil je een activiteit organiseren?
Nee
Ja
Studie-inhoudelijk?
Nee
Ja
Iets voor één studie?
Ja
Nee
Voor informatica?
Ja
Activiteiten: **Informaticacommissie**
Landelijk symposium: **SNIC**
Programmeerwedstrijden: **Escapade**
Symposium: **Sympo**
Nee
Voor informatiekunde?
Ja
Activiteiten: **IZT**
Symposium: **Sympo**
Nee
Voor natuurkunde?
Ja
Activiteiten: **FysiCie**
Landelijke wedstrijd: **PION**
Symposium: **Sympo**
Nee
Voor wiskunde?
Ja
Activiteiten: **Cie Infinity**
Landelijke wedstrijd: **LIMO**
Symposium: **Sympo**
Nee
Zoek de juiste studievereniging
Reis: **Studiereis**
Excursies: **ExcurCie**
Voor ouders: **Ouderdag**
Voor VWO-leerlingen: **Bètadag**
Algemene kennis: **Alfa vs Bètabattle**
Mail naar *actief@a-eskwadraat.nl*

Nul is natuurlijker als je denkt

Door: Sjoerd Boersma

Is 0 een natuurlijk getal? Sommigen vinden van wel, anderen van niet. Aangezien het afhangt van de definitie van 'natuurlijk getal', en zowel het wel als niet toelaten van nul tot de natuurlijke getallen geen grote problemen oplevert in de rest van de wiskunde, kan dit onderwerp zijn van discussie. Dit artikel en dat op de volgende pagina bieden uitkomst.

Definitie: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ is de verzameling natuurlijke getallen.

De natuurlijke getallen zijn het resultaat van tellen. Wanneer we tellen, beginnen we meestal met 1, maar eigenlijk is 0 ook telbaar. Wanneer we kijken naar het aantal elementen van eindige verzamelingen, zien we dat de getallen van $\mathbb{N}_0$ allen telbaar zijn, aangezien de lege verzameling, die ook telbaar is, nul elementen heeft. Negatieve getallen zijn daarentegen niet telbaar, omdat er geen verzamelingen met een negatief aantal elementen bestaan.
De verzameling van gehele getallen, $\mathbb{Z}$, is een groep onder optelling. De natuurlijke getallen zijn helaas geen groep, aangezien de meeste getallen geen inverse hebben, ofwel: optellen kan wel, maar aftrekken leidt soms tot een negatief getal. Wel is $\mathbb{N}_0$ een monoïde[1], met nul als neutraal element. Zonder nul zouden de natuurlijke getallen slechts een halfgroep[2] zijn.
Een veelgehoord argument tegen nul als natuurlijk getal is dat het later is ontstaan en een unieke positie inneemt binnen $\mathbb{N}_0$. Hoewel deze methode ook alle scheikundige elementen zou uitsluiten, omdat deze later zijn ontdekt dan water, vuur, lucht en aarde, zal ik de bewering toch serieus nemen. Nul werd al gebruikt bij de Babyloniërs 2700 jaar geleden en onafhankelijk 'ontdekt' door de Maya's. Maar als we toch meegaan in de redenering, moeten we 1 misschien ook maar een aparte status geven: de oude Grieken[3] begonnen hun natuurlijke getallen bij twee, omdat ze één niet natuurlijk vonden, maar het getal een speciale status verdiende. De geschiedenis herhaalt zich nu dus met het getal nul.
De conventie dat nul een natuurlijk getal is wordt onder meer gebruikt in relatief moderne vakgebieden als de verzamelingenleer, de mathematische logica en de informatica, omdat het hier veel handiger bleek het getal mee te nemen. Dat in andere vakgebieden nul vaak niet als natuurlijk getal wordt gezien, komt meestal voort uit traditie en gewoonte, en dan is het niet veranderd omdat het voor die vakgebieden niet uitmaakt of je bij nul of één begint. Argumenten om nul niet mee te nemen met de natuurlijke getallen, omdat het vaak een uitzonderingspositie inneemt, nemen niet weg dat nul toch heel wat anders is dan -1, $\sqrt{2}$ of ∞. Wiskundigen gaan er prat op dat hun wetenschap onveranderlijk is, en vaststaand als een huis. Maar stiekem verandert zelfs de meest elementaire wiskunde door voortschrijdend inzicht. Wie beweert dat π gelijk is aan drie, wordt ook niet meer serieus genomen. Dus doe niet zo ouderwets, geef nul een kans!

[1] Een monoïde is een groep zonder de eis dat elk getal een inverse heeft.

[2] Een halfgroep is een verzameling met een associatieve operatie, oftewel een monoïde zonder neutraal element.

[3] Jawel, dezelfde oude Grieken die ons de grondbeginselen van de wiskunde hebben nagelaten.

Waarom met niets beginnen?

Door: Darius Keijdener

Het is vrij opvallend dat er geen eenduidige definitie is van de natuurlijke getallen in dé wetenschap die streeft naar eenduidige definities en heldere gevolgen. Maar eigenlijk is deze duidelijkheid nooit het geval geweest. Door de eeuwen heen zijn veel definities vrij vaak veranderd. Het leeuwendeel van de wiskunde (of in ieder geval de notatie) die tijdens de opleiding hier onderwezen wordt, stamt ook pas uit de vorige eeuw.

Definitie: $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ is de verzameling van de natuurlijke getallen.

De natuurlijke getallen zijn het resultaat van tellen. Wanneer we tellen, beginnen we meestal met 1, zoals ieder Sesamstraat kijkend kind zal weten. De reden dat we beginnen bij 1 zit hem in het idee dat tellen alleen zinnig is, als er iets aanwezig is om te tellen. Als je iemand vraagt wat hij ziet, en hij zou antwoorden met 0 leeuwerikken, 0 antwoordapparaten en 0 driewielers, dan is dit antwoord mogelijk wel waar, maar tevens nogal onbruikbaar.
De verzameling van positieve breuken $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{n}{m} | n, m \in \mathbb{N}_+\}$ is een groep onder vermenigvuldigen. De natuurlijke getallen zijn helaas geen groep, aangezien de meeste elementen geen inverse hebben, oftewel: vermenigvuldigen met een getal levert wel een natuurlijk getal op, maar delen levert mogelijk een breuk op. Wel is $\mathbb{N}_+$ een monoïde onder vermenigvuldiging met 1 als neutraal element. Met nul erin zou $\mathbb{N}_+$ niet eens meer een halfgroep zijn, maar nog veel grotere problemen hebben, omdat delen door nul ernstige problemen op zou leveren.

Het toevoegen van een getal 0 aan de natuurlijke getallen zou dan misschien inspireren tot het toevoegen van een 'inverse' van 0: ∞, een 'getal' dat veelal meer problemen veroorzaakt dan oplost. We zouden $0 \cdot \infty$ als 1 kunnen definiëren om zo een inverse te krijgen, maar zelfs dit levert geen groep op: $3 \cdot 0 = 0$, en daarom $1 = \infty \cdot 0 = \infty \cdot (0 \cdot 3) = (\infty \cdot 0) \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$.
Verder kunnen we de natuurlijke getallen ook zien als een opdeling van de gehele getallen. $\mathbb{Z}$ is op te delen in $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{N}_- \equiv -\mathbb{N}_+$ en 0, op zo'n manier dat ieder element maar in één van deze drie verzamelingen zit. Deze verdeling geeft een bewijspraktische reden waarom 0 niet onder de $\mathbb{N}_+$ of $\mathbb{N}_-$ valt, aangezien dan bij bewijzen een getal kan worden ingedeeld in één van de drie categorieën. $\mathbb{N}_0$ pleit daarentegen voor het zien van 0 als zowel positief getal als negatief getal, wat betekent dat er weer extra uitzonderingen genoteerd moeten worden in veel bewijzen.
Dus schat nul voor haar ware waarde, en begin pas met de echte getallen.

Eén van de tegenintuïtieve punten voor beginnende wiskundigen is het opmerken dat $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{N}_+$ dezelfde kardinaliteit hebben. We kunnen namelijk bij ieder getal n in $\mathbb{N}_0$ het getal $n+1$ in $\mathbb{N}_+$ vinden, en vice versa. Hoewel dus de ene verzameling bevat is in de andere, zijn ze wel beide even 'groot'. Dit is daarmee dus ook een isomorfisme tussen beide verzamelingen: een afbeelding wiens bestaan binnen veel gebieden van de wiskunde zegt dat we, voor praktische doeleinde binnen bewijzen, geen verschil tussen deze verzamelingen hoeven te maken. Dus misschien is het uiteindelijk toch allemaal maar een kwestie van voorkeur.

MR Thermometry / 4D Liver Modeling

By: Miekee Lam & Yolanda Noorda

"Science is fascinating, but how can I utilize my skills in society in a more direct way?" A question that comes to the minds of many students of exact science who don't want to stay in fundamental research, neither want to drift too far away from their interest. The answer? Interdisciplinary science. Biomedical Image Sciences (BIS) is an interdisciplinary Master program about medical images, such as CT, SPECT and MRI. Radiologists interpret the images, but it requires an exact background to improve medical imaging. Examples of research questions are: "How is physics used to plan radiotherapy planning?", "Can computers detect lung cancer as well as a radiologist can?" and "What are the mathematics behind calculating an optimal path for surgery?". The first year of BIS is a theoretical year that will provide you the basic knowledge required to tackle these kinds of challenges. During the research project of 9 months in the second year you will work on a subproblem of a research question similar to the ones above. In this article you will be given an impression of the research of two PhD candidates who did a Bachelor in Physics, the BIS Master and continued with a PhD track at the hosting institute of BIS, the Image Sciences Institute, located in the UMC Utrecht.

MR Thermometry: Miekee Lam

Magnetic Resonance Imaging (MRI) is based on the excitation and relaxation of spins in the human body. The MRI scanner itself is a huge magnet that puts the spins in an equilibrium state with a resonance frequency that is linked to the magnetic field strength. The spins are excited by application of a radiofrequency pulse that is on resonance. While going back to their equilibrium state, the spins induce a small magnetic field which can be picked up as a signal with a coil. Spatial encoding of the signals is done by applying magnetic field gradients, resulting in spatially dependent frequencies and phases. The signals are acquired in the frequency domain and the MR images are then reconstructed by Fourier transformation. In practice, we approach the process classically, because the additional quantum mechanical effects are negligible. It is the understanding of the whole process of signal encoding and reconstruction that is the challenge and gives you the ability to think about improvements of MRI. For example speeding up the acquisition by playing around in the frequency domain, or manipulating the magnetization for specific scans by adjusting the sequence of RF excitation and gradients. During my PhD track I am working on improved MR thermometry methods for non-invasive thermal therapies. During such treatments tumors are non-invasively heated up to temperatures that lead to necrosis and image guidance is the only way to monitor. Non-invasive thermal mapping is the most logical monitoring method and MR thermometry is most commonly used. MR thermometry is based on the temperature dependency of the resonance frequency of water protons: hydrogen bonds are extended at temperature increase, giving the electrons more mobility resulting in stronger shielding of the nucleus from the external magnetic field (screening effect).

However, this method only gives relative temperatures and only works in water-rich tissue. By utilizing the temperature independency of the resonance frequency of fatty acids it is possible to get absolute temperatures in tissue composed of both water and fat, for example in bone marrow around bone metastases. The signal in a voxel (3D pixel) of such a mixed composition, acquired with a sequence called multi-gradient echo, looks like this:

If scans like these can be acquired during thermal therapy, the treatment can be monitored or even controlled. By adding a feedback loop, information from the thermal map can be used to adjust the treatment real-time, making the treatment more advanced and controlled.

$$S(t) = \sqrt{A_w^2 e^{-2R_{2,w}^* t} + A_f^2 e^{-2R_{2,f}^* t} + 2A_w A_f e^{-\left(R_{2,w}^* + R_{2,f}^*\right)t} \cos\left(2\pi \Delta f_{wf} t + \Delta\varphi_{wf}\right)} \tag{1}$$

Here Δf_{wf} is the difference in resonance frequency between water and fat. With a calibration of $\Delta f_{wf,calib}$ for one temperature T_{calib}, the temperature can be calculated using the temperature dependency of the screening constant σ:

$$T = \left(\Delta f_{wf} - \Delta f_{wf,calib}\right) \frac{2\pi}{\gamma B_0} \frac{dT}{d\sigma} + T_{calib} \tag{2}$$

After acquiring the signal at different time points with a multi-gradient echo sequence, the signal from each voxel can be fitted to Equation [1]. From the fit, Δf_{wf} can be extracted and used to calculate the temperature using Equation [2], to make an absolute temperature map as shown below.

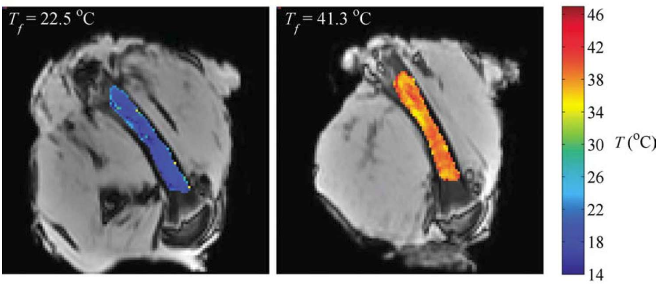


Figure 1: Preliminary results of absolute MR thermometry achieved by the analysis of the multi-gradient echo signal in the time domain, in ex vivo ovine hind limb in a waterbath.[1]

Yolanda Noorda, 4D Liver Modeling

For thermal ablation of tumors, real-time image guidance is required to monitor the treatment. My PhD project focuses on the image processing aspects of this treatment on liver tumors. A focused ultrasound beam will be shot through the rib cage on the liver tumor, to create a focal spot at that location. This is unfortunately not that easy: the liver moves and deforms, and the focus has to remain on the tumor all the time. To be able to do this, it should be possible to predict the tumor location at every time point, such that the beam can be adjusted accordingly. This feedback process will take about 1.5 s, so it is really necessary to have an accurate model to rely on.

To be able to predict the tumor position, I am working on a 4D liver model. This model should be able to predict the motion and deformation of the liver through the breathing cycle. The liver is attached to the diaphragm, such that the liver follows the diaphragm motion. During inhalation, the liver is pushed down by the diaphragm, while at exhalation, the muscles relax and the liver shifts back up again. The main translation of the liver is thus up and down, but it also moves a bit in the other directions. Due to movements of the surrounding organs, the liver deforms locally. To get the geometry of the liver, for a few volunteers one 3D breath-hold liver MRI scan in inspiration and one in expiration were made. From these scans the liver needs to be extracted, a process that is called segmentation. Preferably, segmentation is done automatically, however, the liver is a difficult structure to segment and therefore this is done semi-automatically for now. Once the liver is segmented, a mesh can be generated to discretize the volume. This is done by dividing the surface in a set of triangles, which have to be small enough to be able to create a realistic model. On this discretized volume, the forces that act on the liver during breathing can be simulated and the corresponding motion field can be calculated by solving the equation of motion for every mass element m_i using finite elements:

$$f_i^t = m_i a_i^t = \left(\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} k_{ij} \left(\vec{l}_{ij}^t - \vec{l}_{ij}^0 \right) \right) + f_e^t \tag{3}$$

where $\mathcal{N}(i)$ is the neighborhood of mass element i, k_{ij} is the stiffness of the tissue between element i and j, $\vec{l}_{ij}^t$ is the distance between element i and j at time t, and f_e^t are the external forces acting on the liver at time t (friction with surrounding organs, gravity). To determine the local stiffness values, the inner structure of the liver is important. The liver contains an extensive vascular tree, but apart from these vessels the liver is quite homogeneous. It is thus important to segment the vessel tree automatically. This can be done by analyzing the eigenvalues of the Hessian matrix in every voxel, which tell something about the second order structure. By selecting the appropriate conditions, long, elongated structures (vessels) can be filtered out, and they can be assigned different stiffness values. To drive the model parameters, a registration is made from the inspiration to the expiration image. This means that a mapping is found that describes the transformation. A registration can be obtained by maximizing a similarity measure with an appropriate optimization method, such that the difference between the images will be as small as possible. This registration gives the deformation field between the two most extreme stages. The motion at the time-points in between should then be derived from the model. Once the model has been created, it can be used during treatment: the breathing signal can be measured and one can look up the corresponding tumor location.

These research topics are just two examples of many, where an exact scientist can make full use of his/her knowledge and abilities in a medical environment. It requires some programming to process the raw scan data and the actual images. To understand what you're actually doing, you should understand the origin of the signal, the acquisition process and the underlying mechanisms of contrast. The BIS Master Program covers these topics and in that way prepares you to make use of your exact background in an interdisciplinary environment.

References

[1] S .M. Sprinkhuizen et al. *Absolute MR Thermometry Using Time-Domain Analysis of Multi-Gradient Echo Magnitude Images*, Magnetic Resonance in Medicine 64:239–248,2010.

O, kom er eens kijken...

De Sint, wie kent hem niet? Maar ken je hem echt wel zo goed als je dacht? Al mag je student zijn en de goedheiligman inmiddels vergeten zijn, hij is je niet vergeten. Hier een exclusief ongecensureerd interview met de enige echte alombekende Sinterklaas. En wie weet, misschien komt hij dit jaar je schoen vullen bij A–Eskwadraat...

Sinterklaas met Zwarte Piet

Wat is uw drijfveer om steeds terug te komen naar Nederland?

Het onthaal als een popster, al die kinderen die staan te zingen, daar doe het toch voor. En mijn Managerpiet weet er ook nog eens een goed tv-contract uit te slepen elk jaar, dat geeft dat extra zetje dat nodig is om toch weer die kou in te trekken.

Hoe oud bent u nou eigenlijk?

Vanaf een zeker moment is het niet beleefd meer om naar iemands leeftijd te vragen, maar laten we het erop houden dat dat bij mij al zeer lang het geval is.

Waarom gaat u elk jaar terug naar Spanje en blijft u niet gewoon in Nederland?

Hoewel ik alle aandacht in Nederland leuk vind, is het ook wel fijn om gewoon onder de mensen te kunnen zijn. In Spanje kan ik gewoon over straat zonder herkend te worden, en zonder dat mensen spontaan in gezang uitbarsten. Van een maandje Nederland moet ik altijd een flinke tijd bijkomen, zeker als het koud was.

Hoeveel pieten heeft u?

Mijn Accountantpiet vindt dat het er teveel zijn, terwijl mijn Roosterpiet altijd klaagt dat het er te weinig zijn. Ik denk dat het er precies genoeg zijn.

Zij worden vast ook oud, hoe komt u aan jonge nieuwe pieten? Hebt u wel eens overwogen om uw pieten te laten vervangen door robots?

Als de stoute kinderen die in de zak zijn meegenomen wat ouder (en beter opgevoed) zijn, dan willen ze graag Nederland weer eens zien. Daarom zijn de pieten ook nog vaak wat ondeugend.

“sinterklaasliedjes mogen ook wel wat beter geoefend worden, misschien moeten ze daar studiepunten voor krijgen”

Hoe lang is uw baard?

Na 5 december scheer ik hem altijd helemaal af, anders hangt hij zo in mijn soep, en dan word ik in Spanje niet herkend door Nederlanders op vakantie. Ook hangt hij zo rond december al veel te vaak in mijn soep, dat eet zo lastig.

Wat is uw favoriete snoepgoed?

Ik mag van mijn tandarts eigenlijk geen snoepgoed meer eten, maar stiekem eet ik nog wel eens een pepernoot (al dan niet met chocola eromheen).

Wat vindt u van de bètastudenten in Utrecht?

Het zijn brave kinderen meestal, hoewel ik merk dat ze vaak wel erg wild en druk worden als ik langskom bij de colleges. Hopelijk zijn ze normaal wat rustiger. En de sinterklaasliedjes mogen ook wel wat beter geoefend worden, misschien moeten ze daar studiepunten voor krijgen.

Houdt u van racen? Wat is de hoogste snelheid dat u op uw paard binnen de bebouwde kom heeft gereden?

Racen? Nee, daar houd ik helemaal niet van. Op die gladde daken ben ik vooral blij als ik er weer levend vanaf kom, ik weet helemaal niet hoe snel ik ga.

Maakt u tegenwoordig gebruik van een navigatiesysteem op uw paard?

Nee, mijn wegwijspieten weten heel goed de weg te vinden voor mij.

Wat vindt u ervan dat er al sinds september pepernoten worden verkocht?

Pepernoten zijn natuurlijk erg lekker, ik hoop alleen dat niemand zijn buik er vol van heeft als het heerlijk avondje gekomen is.

Bedankt voor het interview, is er nog iets dat u aan de studenten kwijt wilt?

Bedankt voor de vragen. Tegen de studenten zou ik willen zeggen: blijf vooral verlanglijstjes sturen, maar dan wel met de echte post of in de schoen, want mijn elektronische postbus loopt over van mensen die geen dingen van de Sint willen, maar hem juist dingen willen aanbieden (en dan vooral zaken waar een goedheiligman zich echt niet aan gaat wagen). Behalve dan erfgenamen van dode prinsen uit Nigeria, maar volgens mijn Grote Boek zijn dat meestal geen brave kinderen.

Sinterklaas

Overerving bij objecten

Door: Bas Lommers & Jan de Wit

Om de niet-informatici kennis te laten maken met een belangrijk concept binnen ons vakgebied en om informatici hier eens aan te herinneren volgt hier een korte introductie van objectgeoriënteerd programmeren.

Objectgeoriënteerd programmeren kan gezien worden als een manier van het indelen van code, als tegenhanger van procedureel programmeren. Binnen objectgeoriënteerd programmeren kennen we klassen, objecten, methodes en attributen. Klassen zijn een soort blauwdrukken voor objecten. Objecten zijn stukken programma die met deze blauwdrukken gemaakt worden. Om dus echt iets met een klasse te kunnen doen zal hiervan eerst een object aangemaakt moeten worden. Het doel van deze objecten is om de data en de handelingen hierop te combineren.

Een klasse bestaat uit methodes en attributen of kenmerken. Methodes zijn handelingen of functies die het gedrag van het object bepalen. Attributen bepalen de staat van het object. Zo is een klasse te vergelijken met een ontwerp voor een auto, terwijl het object een geproduceerde auto is. Net zoals met auto's kunnen er meerdere objecten gemaakt worden van een ontwerp. De kleur van een auto zou een attribuut zijn en het starten van de auto een methode.

De vier eigenschappen van objectgeoriënteerd programmeren zijn: afscherming (encapsulatie), modulariteit, overerving en polymorfisme. Afscherming betekent dat bepaalde attributen en methodes die niet belangrijk zijn om het object te gebruiken niet beschikbaar zijn.

> "De auto zelf weet hoe dit in werking gezet moet worden, maar voor de eindgebruiker is dit niet relevant"

Zo is het om met een auto te rijden niet belangrijk om te weten wat voor motor er in een auto zit of hoe deze motor gestart moet worden. De auto zelf weet hoe dit in werking gezet moet worden, maar voor de eindgebruiker is dit niet relevant. De eindgebruiker in het geval van objectgeoriënteerde code kan bijvoorbeeld de programmeur zijn die de klasse gaat gebruiken als onderdeel van zijn of haar code. Dit brengt ons bij de tweede eigenschap: modulariteit. Dit betekent dat een object een afzonderlijk deel van het programma moet zijn en op zichzelf moet kunnen staan. In het ideale geval zou de code op dezelfde wijze moeten kunnen werken in je eigen programma als in dat van een programmeur aan de andere kant van de wereld zonder er iets aangepast hoeft te worden. Of in het geval van de auto: als iemand anders met jouw auto zou willen rijden en deze in een andere garage zou parkeren moet dit geen problemen opleveren. Op deze wijze wordt slim programmeren gestimuleerd, waarbij gelet wordt op de toekomst.

Overerving zorgt ervoor dat je klassen attributen en methodes kunt overnemen van andere klassen. Hierin is de klasse die overerft de subklasse en de klasse waarvan attributen en methodes worden overgenomen de superklasse. Hier komt het metafoor met de auto een beetje in het gedrang, maar technisch gezien zou je een vrachtauto als een specifieke auto kunnen zien. Op deze vrachtauto kunnen bijvoorbeeld opleggers worden aangesloten.

“Door overerving en polymorfisme is het gemakkelijk om gebruik te maken van programma-onderdelen van derden”

Overerving is dan heel handig voor het ontwerp van je vrachtauto omdat je dan niet meer na hoeft te denken over hoe een motor de wielen laat draaien zonder dat je bij het ontwerp van de gewone auto rekening moet houden met de mogelijkheid dat er ook vrachtauto’s kunnen zijn waar opleggers op aangesloten kunnen worden. Voor alle technische basiskenmerken en -functionaliteit wordt dan alles gebruikt wat voor de auto al ontworpen is, terwijl kenmerken die specifiek voor een vrachtwagen zijn (zoals een optie voor opleggers) in een subklasse worden vastgelegd. De auto wordt hier niet onnodig complex van en er wordt tevens geen onnodig werk verricht om het wiel (letterlijk) opnieuw uit te vinden.

De laatste eigenschap, polymorfisme, heeft veel te maken met overerving. Polymorfisme zorgt ervoor dat je in een subklasse een methode kunt overschrijven van de bijbehorende superklasse. Om weer terug te komen op de metafoor: een oplegger heeft ook remmen net zoals de vrachtauto en deze moeten meeremmen als de vrachtauto remt. Je kunt dan met behulp van polymorfisme bij de vrachtauto de methode ‘rem’ van auto overschrijven en zo ontwerpen dat hij remt zoals een auto maar dat ook de oplegger remt.

Door overerving en polymorfisme is het gemakkelijk om gebruik te maken van programma-onderdelen van derden. Het is mogelijk om onderdelen op conceptbasis aan te passen. Het is niet belangrijk hoe deze onderdelen van binnen werken om ze uit te kunnen breiden. Het is daarnaast mogelijk om de originele methode van de superklasse aan te roepen en hier in je eigen subklasse iets aan toe te voegen, zodat de originele functionaliteit intact blijft en slechts wordt uitgebreid.

Door de tijd heen zijn veel programmeurs overgestapt op het nieuwere objectgeoriënteerd programmeren; veel populaire programmeertalen ondersteunen hierdoor dit concept. De mogelijkheden van procedureel programmeren zijn hierdoor uit te voeren op een objectgeoriënteerde manier en vice versa.

Excursie klinische fysica

Vrijdag 30 september bezochten wij de klinische fysica-afdeling van het VUmc. Hier had Phil, een alumnus van A–Eskwadraat, voor ons een mooi programma in elkaar gedraaid. We kregen onder andere vier presentaties waarvan ik hier kort de inhoud samenvat.

Klinische fysica is in vier gebieden in te delen: de gebieden radiotherapie, nucleaire fysica, audiologie en algemene klinische fysica. Bij algemene klinische fysica ondersteunt de klinisch fysicus de arts bij het gebruik van apparatuur. Hierbij werd ons verteld dat artsen vaak goed weten hoe ze de patiënten moeten behandelen, maar meestal niet op de hoogte zijn van alle mogelijkheden van het apparaat of de nieuwste apparaten. Een klinisch fysicus informeert de arts hierbij. Bij de behandeling staat een klinisch fysicus vaak naast de behandelend arts en bedient de klinisch fysicus soms de apparaten. Bij de excursie werd verteld dat het voorkwam dat de klinisch fysicus meer van de operatie wist dan de behandelend arts, omdat de arts dan in opleiding was en de klinisch fysicus al jaren mee liep. Zo kon de klinisch fysicus de arts af en toe corrigeren bij een operatie. Daarnaast ligt er ook een taak in het onderhouden en testen van nieuwe apparatuur, zodat deze veilig en goed gebruikt wordt door de arts.

Radiotherapie, beter bekend als bestraling, is een vakgebied waar een klinisch fysicus zich in kan specialiseren. Bij bestraling wil men zo goed als mogelijk het doelweefsel bestralen en het gezonde omringende weefsel sparen, hierdoor bestraalt men vanuit alle mogelijke richtingen. Voor iedere patiënt wordt een specifiek behandelplan opgesteld door de klinisch fysicus. Dat wordt in overleg met de behandelend arts uitgevoerd.

De klinisch fysicus kan zich echter ook specialiseren in de richting van de nucleaire therapie. Nucleaire therapie wordt gebruikt om de aanwezigheid van bepaalde typen weefsels aan te tonen. Patiënten krijgen een stof toegediend die radioactief is, waarna er met behulp van Positron Emission Tomography (PET) een scan gemaakt wordt.[1] De klinisch fysicus zorgt ervoor dat alles veilig verloopt en bij een PET-scan zorgt hij ervoor dat de ruwe data omgezet kan worden in beelden waar de arts weer een diagnose uit op kan maken.

Een klinisch fysicus kan zich tot slot nog specialiseren in de audiologie. Bij deze specialisatie komt deze het meest in contact met de patiënten. Daarbij kan gedacht worden aan gehoortesten bij kinderen, maar ook het aanmeten van een gehoorapparaat bij ouderen. Een klinisch fysicus is dan zeer nauw betrokken bij de patiënt, deze kan dan zelfs een slechtnieuwsgesprek met patiënten of ouders van patiënten voeren. Momenteel is er een tekort aan personeel in deze tak en ze zijn maar al te blij als je daar stage wilt lopen. De dag was top geregeld, inclusief een verzorgde lunch en wij zijn veel wijzer geworden!

Gijs Boosten

[1] Een PET-scan maakt gebruik van annihilatie van een positron dat uitgestoten wordt door de ingebrachte stof met een elektron. Er ontstaan dan twee fotonen, die vervolgens gemeten worden.

Ramsey-kardinalen

Door: Julian Lyczak

In het jaar 1961 werd Michael Ramsey benoemd als 100ste aartsbisschop van Canterbury. De drager van dit ambt is de spiritueel leider van de Anglicaanse kerk, de tak ven het christelijk geloof die in Groot-Brittanië voornamelijk en voornamelijk in Groot-Brittanië wordt gepraktiseerd. De Engelse kerk splitse zich van de Rooms-Katholieke Kerk onder koning Henry VIII in 1534. Het is bekend dat Michael met de paus heeft gesproken over het verenigen van de twee kerken, maar de scheiding van de Christendom aanhangers is ook nog na 487 jaar nog steeds een feit. Mocht het 50 jaar geleden toch gelukt zijn, dan is er geen twijfel over mogelijk dat Ramsey kardinaal was geworden. Een woord dat door de Ramsey-kardinalen van Erdös en Hajnal nu eerder gerelateerd wordt aan zijn broer Frank Ramsey. Dit artikel gaat daarover, want we zijn natuurlijk geen theologische studievereniging.

Frank Ramsey

Frank Ramsey was een wiskundige en een filosoof die al op 19-jarige leeftijd naam vestigde door het boek Tractatus Logico-Philosophicus van Wittgenstein te vertalen naar het Engels. De talentvolle man is helaas niet ouder geworden dan 26 jaar, maar heeft zeker mooie wiskunde achter gelaten, waar menig ander wiskundige op heeft kunnen voortbouwen. Wij bespreken in het bijzonder zijn meest bekende werk: de stelling van Ramsey.

“De talentvolle man is helaas niet ouder geworden dan 26 jaar, maar heeft zeker mooie wiskunde achter gelaten.”

De stelling van Ramsey

Ramseys stelling gaat over combinatoriek en in het bijzonder over volledige grafen. Een volledige graaf is een graaf waarbij tussen ieder tweetal verschillende punten precies één rand loopt. Met een volledige deelgraaf zullen we een deelgraaf bedoelen die als graaf volledig is.

Laten we nou eens een volledige graaf bekijken met een gegeven aantal punten P. Als we nu iedere rand met één van 2 kleuren kleuren dan is er een volledige deelgraaf, waarvan alle randen dezelfde kleur hebben. Dit is natuurlijk logisch, we kunnen natuurlijk altijd een volledige deelgraaf nemen van één punt. Maar als we P steeds groter kiezen zal er al snel een éénkleurige volledige deelgraaf met meer punten zijn. De vraag is natuurlijk: kunnen we P zo groot kiezen dat er, ongeacht de kleuring, altijd een éénkleurige volledige deelgraaf bestaat die precies uit p punten bestaat? Ramsey wist al dat het antwoord op deze vraag positief was, en hij formuleerde zijn beroemde stelling die het bovenstaande zelfs nog iets generaliseert:

Stelling 1. *Er bestaat een positief geheel getal P zo dat iedere volledige graaf met P punten, waarvan de randen gekleurd zijn met de kleuren blauw en rood, altijd een volledige deelgraaf bevat die b punten heeft en geheel blauw is danwel r punten heeft en geheel rood is. Het kleinste van deze getallen P noteren we als $R(b, r)$. De getallen van deze vorm noemen we Ramsey-getallen.*

Opgave 1. *Bewijs de stelling van Ramsey met inductie naar $b+r$, door te bewijzen dat $R(b, r) \leq R(b, r-1) + R(b-1, r)$.*

Opgave 2. *Ga na dat $R(b, r) = R(r, b)$ en vind de Ramsey-getallen als één van b en r gelijk is aan 1.*

Opgave 3. *Bewijs dat $R(3, 3)$ gelijk is aan 6.*

Gebruik maken van de afschatting waar het bewijs op gebaseerd is, levert een bovengrens voor $R(b, r)$, namelijk

$$R(b, r) \leq \binom{b+r-2}{b-1}.$$

Deze bovengrens wordt voor wat grotere getallen b en r al heel ruim zoals we kunnen zien in Tabel 1.

Afgezien van de gegevens in de tabel zijn de precieze Ramsey-getallen alleen bekend als r of b gelijk is aan 1, en als één van de twee 2 is en de ander kleiner dan 10. Het berekenen van de Ramsey-getallen is dus ontzettend lastig, zoals opgemerkt door Paul Erdös in zijn volgende citaat: "Suppose aliens invade the earth and threaten to obliterate it in a year's time unless human beings can find the Ramsey number for red five and blue five. We could marshal the world's best minds and fastest computers, and within a year we could probably calculate the value. If the aliens demanded the Ramsey number for red six and blue six, however, we would have no choice but to launch a preemptive attack."

Eén van de mooie eigenschappen van de stelling van Ramsey is dat er een vrij directe generalisatie is naar een willekeurig (eindig) aantal kleuren.

Stelling 2. *Gegeven zijn k kleuren k_1, ..., k_k en k gehele positieve getallen $p_1, \ldots, p_k$. Er bestaat een natuurlijk getal P zo dat voor iedere kleuring van de volledige graaf met P punten er een j bestaat met de eigenschap dat er een volledige deelgraaf bestaat met p_j punten die waarvan de randen allemaal gekleurd zijn met k_j. De kleinst mogelijke P noteren we met $R(p_1, \ldots, p_k)$.*

Tabel 1: Kleine Ramsey-getallen

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	9	14	18
4	1	4	9	18	25	35-41
5	1	5	14	25	43-49	58-87
6	1	6	18	35-41	58-87	102-165

Opgave 4. *Bewijs de meerkleurige versie van de stelling van Ramsey.*

Ramseys stelling voor aftelbare verzamelingen

Laten we ons nu eens inlaten met de oneindige verzamelingen. We hebben al gezien dat als we een eindige volledige deelgraaf in één kleur willen, dat we dan kunnen beginnen met een eindige volledige graaf. We zouden ons nu kunnen afvragen wat het kleinst mogelijke kardinaalgetal is waarvoor een gekleurde volledige graaf van die grootte altijd een éénkleurige, volledige, aftelbaar oneindige deelgraaf heeft.
Dit vraagstuk lijkt opeens een stuk meer op verzamelingenleer dan op combinatoriek. We zullen het probleem dan ook vanaf nu verzamelingtheoretisch benaderen en daarvoor introduceren we de symbolen $[X]^\kappa$ voor de verzameling van alle deelverzamelingen van X met kardinaliteit κ. Later zullen we ook de notatie $[X]^{<\kappa}$ tegenkomen voor alle deelverzamelingen van X die kardinaalgetal kleiner dan κ hebben.

"If the aliens demanded the Ramsey number for red six and blue six, however, we would have no choice but to launch a preemptive attack."

Stelling 3. *Laat X een aftelbaar oneindige verzameling en k en n natuurlijke getallen zijn. Dan geldt dat voor iedere afbeelding f van $[X]^n$ naar $\vec{k} := \{0, 1, \ldots, k-1\}$ er een oneindige deelverzameling A van X bestaat zo dat f constant is op $[A]^n$.*

Bewijs. We bewijzen de stelling voor $k = 2$. Voor $k = 1$ is de stelling triviaal en de stelling voor hogere k volgt uit het geval $k = 2$ zoals dat in het eindige geval gebeurde.
We bewijzen de stelling met inductie naar n. Voor $n = 1$ is de stelling waar, want er staat dan enkel dat één van de verzamlingen in een partitie van X in twee disjuncte deelverzamelingen oneindig moet zijn. Stel nu dat de stelling geldt voor alle $n =\leq k$. We bewijzen de stelling voor $n = k + 1$.
Laat Z een willekeurig aftelbaar oneindige verzameling en f een afbeelding $[Z]^{k+1} \to \vec{2}$ zijn. Kies een willekeurig element $z \in Z$ en definieer de verzameling $W = Z \backslash \{z\}$. Door de inductiehypothese op de samenstelling van de afbeeldingen $W^k \to Z^{k+1} \to \vec{2}$, waarbij de eerste pijl simpelweg het terugstoppen van z is, vinden we dat W een oneindige deelverzameling W' moet hebben zo dat de samenstelling constant is op $[W']^n$. De verzameling Z heeft dus een element z en een oneindige deelverzameling W' zo dat alle deelverzameling van Z in W' verenigd met $\{z\}$ dezelfde kleur hebben.
Laat x_0 en X_0 de objecten zijn voor X en definieer nu recursief x_{i+1} en X_{i+1} als die objecten voor X_i. Dit levert een oneindig rijtje $x_0, x_1, x_2, \ldots$ in X met de eigenschap dat het beeld van een deelverzameling van dit rijtje uniek bepaald is door het element dat als eerste in het rijtje voorkomt. Het codomein is een eindige verzameling en dus zal er een element in k zijn dat oneindig vaak wordt aangenomen. Het volledig origineel van dit element voldoet. $\square$

Een interessant feit is dat deze oneindige variant van de stelling van Ramsey het eindige geval impliceert. Iets waar we hier niet langer bij stil zullen staan.

Ramsey-kardinalen

Voor het definiëren van Ramsey-kardinalen moeten we nog wat dieper de verzamelingenleer in en introduceren we de volgende notatie:

Definitie 1. Voor vier kardinaalgetallen κ, λ, n en m schrijven we

$$\kappa \to (\lambda)^n_m$$

als voor iedere afbeelding $f : [\kappa]^n \to m$ er een deelverzameling van κ bestaat met kardinaalgetal λ zo dat f constant is λ. Om verzamelingsleertechnische redenen ziet men zelden dat n oneindig is en n zal dan ook in het algemeen een natuurlijk getal zijn. Een veel voorkomende variant is dat men de n vervangt door $< \aleph_0$.

We kunnen stelling 3 nu direct herformuleren.

Herfomulering van stelling 3. *Voor alle natuurlijke k en n geldt de volgende uitspraak*

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k.$$

Het, in het begin beloofde, verband tussen Ramsey en zijn kardinalen is nu simpelweg de volgende definitie:

Definitie 2. Een kardinaalgetal κ is een Ramsey-kardinaal als

$$\kappa \to (\kappa)^{<\aleph_0}_2.$$

De belangrijkste stelling over Ramsey-kardinalen is zeker het volgende verrassende resultaat:

Stelling 4. *Zij κ een Ramsey-kardinaal, dan geldt*

$$\kappa \to (\kappa)^{<\aleph_0}_\mu.$$

voor alle kardinalen $\mu < \kappa$.

Deze stelling zou triviaal zijn in het geval dat de Ramsey-kardinalen naar de andere broer waren vernoemd. De verzamelingen van kardinalen onder Ramsey zou dan immers leeg zijn, aangezien de kerk van Engeland geen kardinalen heeft binnen haar hiërarchie.

Referenties

[1] E en lijst met bekende Ramsey-getallen en boven- en ondergrenzen voor $b \leq 10$ en $r \leq 15$, pagina 4 `http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf`

[2] E en bewijs voor $R(3, 6) = 18$ van David Cariolaro `http://www.math.sinica.edu.tw/post-doctor/cariolaro/r36.pdf`

Kort

Ook deze keer in Kort weer nieuws over het blad en haar redactieleden.

Gemiste kardinalen

We hebben deze Vakidioot nog best wat kardinalen gemist. Wist je dat een kardinaal ook:

- deze vogel is?

- een vlinder is?
- een sterke drank is?
- een kleur is?
- een druif is?
- een gemeentevrij gebied in Virginia is?
- de naam is van bijzonder veel sportteams?
- een veel te veel gebruikt woord is?

$\mathbb{N}_0$ versus $\mathbb{N}_+$

Een kleine disclaimer: de artikelen over de definitie van de natuurlijke getallen zijn arbitrair verdeeld. Er moeten derhalve ook geen conclusies verbonden worden aan het feit dat het ene artikel door een natuurkundige en het andere artikel door een wiskundige geschreven is.

In het buitenland

Oplettende lezers missen mogelijk het nieuwe deel van de sinds lange tijd trouw gepubliceerde serie 'A–Eskwadrater in het buitenland'. Deze rubriek is echter eenmalig komen te vervallen wegens het in het buitenland vertoeven van het verantwoordelijke redactielid.

In de mode

Mocht je verblind worden door de flitsende mode van een voorbijganger, dan is de kans groot dat je zojuist onder de indruk bent geraakt van de prachtige nieuwe reporterchapeaus van onze redactieleden. Hou ze in de gaten, en zorg dat je jezelf er een beetje tegenop kleedt. . .

Rectificatie Raytracing

Door Alexander Melchior werden wij er terecht op gewezen dat raytracing wel degelijk in toegenomen mate wordt toegepast voor real-time toepassingen, dankzij nieuwe ontwikkelingen in hardware en het verdelen van taken over meerdere processors. Voor een leuke demo verwijzen wij (tevens dankzij Alexander) naar: `www.wolfrt.de`.

Rectificatie Medezeggenschap

In het artikel 'Medezeggenschap A–Eskwadraat' op pagina 4 van vorige Vakidioot stond een incorrect e-mailadres van het SONS. Het hoort te zijn: `science.sons@uu.nl`.

Hilbert Hotel

Door: Sjoerd Boersma

Oneindigheid is lastig, want twee keer oneindig is óók oneindig, en oneindig min één is dat ook. Als je oneindig van oneindig aftrekt is het antwoord ongedefinieerd. Maar echt leuk wordt het pas als je leert dat er verschillende oneindigheden (ook wel kardinaliteiten) zijn.

Stel dat je manager bent van een hotel met oneindig veel kamers, genaamd Hilbert Hotel. Voor de wiskundefascisten onder onze lezers: het zijn aftelbaar oneindig veel kamers. De kamers bevinden zich aan weerszijden van een lange gang: links de oneven nummers 1, 3, 5, 7, ... en rechts de even nummers 2, 4, 6, 8, ... en deze kamers bieden elk ruimte voor één gast. Alle positieve gehele getallen[1] worden gebruikt als kamernummer, en er is dus geen grootste kamernummer.

Raadsel 1

Vannacht zit het hotel helemaal vol, maar er arriveert nog een gast, die graag in het hotel zou overnachten. Je zou de gast graag in het hotel onderbrengen, gelukkig is dit ook mogelijk. Hoe ga je dit doen? Het is uiteraard niet de bedoeling dat de goede man in de bezemkast moet slapen of bij iemand anders op de kamer.

Antwoord: Laat alle andere gasten één kamer doorschuiven, naar de kamer met het nummer één hoger dan waar ze zaten. Voor elke gast is er nu een nieuwe kamer, en de kamer met nummer 1 komt leeg te staan. Daar kan onze nieuwe gast zijn intrek nemen.

Hoe kan dit nu? Bovenstaand raadsel is er op gebaseerd dat oneindig plus één ook gewoon oneindig is. Het kan nog een stapje erger.

Raadsel 2

Het Hilbert Hotel zit weer helemaal vol, net als de dependance van het hotel aan de overkant van de straat, dat het evenbeeld is van het Hilbert Hotel en ook helemaal vol zit. Helaas is er een bommelding geweest in de dependance, en van de brandweer moet iedereen deze verlaten. De directie besluit dat alle gasten uit de dependance in de hoofdlocatie van het Hilbert Hotel moeten worden ondergebracht. Hoe ga je dit oplossen?

Antwoord: De gasten uit het Hilbert Hotel worden allemaal gevraagd te verhuizen naar de kamer met het kamernummer dat twee keer hun oude kamernummer was. De gasten uit de dependance, die ook allemaal een kamernummer hadden, mogen de tussenliggende kamers betrekken. De gast met kamernummer n in de dependance mag naar de kamer met nummer $2n - 1$ op de hoofdlocatie.

Door bovenstaande verhuizing passen de gasten uit beide hotels nu precies in het ene hotel. Dit is er op gebaseerd dat twee maal oneindig ook oneindig is. Het is zelfs ook mogelijk om de gasten uit oneindig veel Hilbert Hotels onder te brengen in één ervan. Is het dan werkelijk mogelijk om álle hoeveelheden mensen in het hotel onder te brengen? Nee.

[1] Vaak worden de positieve gehele getallen ‘natuurlijke getallen’ genoemd, maar het is dan onduidelijk of nul hierbij is meegenomen. Zie ook de artikelen op pagina’s 23 en 24.

Te weinig kinderkamers

Stel nu dat het Hilberthotel vol zit, en men besluit het volgende: omdat in Afrika veel kinderen zijn waarvan de ouders zijn overleden, adopteert elke deelverzameling een wees uit dit continent. De persoon in de eerste kamer adopteert dus in zijn eentje een kind, maar ook eentje samen met de gast in kamer 2, eentje met de gast uit kamer nummer 3 en eentje met zowel de bewoner van kamer 2 als die van nummer 3. Maar ook eentje met alle bewoners van oneven kamers en eentje met álle gasten uit het hotel. Ze besluiten dat alle geadopteerde kinderen in de dependance van het hotel moeten komen slapen, dat daarvoor leeg stond[2]. Helaas past dat niet.

Laten we aannemen dat wél alle kinderen in de dependance passen, geef ze dan allemaal een kamer. Om de kinderen uit elkaar te houden geven we elk kind een code, die bestaat uit nullen en énen. De code van een gegeven kind bestaat op de n^{de} plaats uit een 1 als de gast uit kamer n één van zijn adoptieouders is, en anders een 0. Bijvoorbeeld: het kind geadopteerd door alleen de gast uit kamer 2 heeft als code $01000000\ldots$, het kind van de gasten uit even kamers $0101010101\ldots$ en het kind van alle ouders uit kamers met een kamernummer dat een kwadraat is $1001000010000000100\ldots$. Definieer nu voor alle positieve gehele getallen i, x_i als het i^{de} getal uit de code van het kind in kamer i. Laat $y_i = 1 - x_i$. In welke kamer zit nu het kind met de code $y_1 y_2 y_3 y_4 \ldots$?

David Hilbert

Niet in kamer 1, want het eerste cijfer uit de code van het kind op kamer 1 verschilt van die van het genoemde kind. En ook niet op kamer 2, want $x_2 \neq y_2$, etcetera. Het genoemde kind heeft dus geen kamer in het hotel.

Hieruit volgt dat het niet mogelijk is alle kinderen in het hotel te krijgen. Want ook als je dit kind op de eerste kamer zet en de rest opschuift, is er nog wel een kind te vinden dat er niet in zit. Dit komt doordat het aantal deelverzamelingen van de gasten uit het Hilbert Hotel daadwerkelijk groter is dan het aantal gasten zelf. Het is een grotere soort oneindig!

[2] Want het was ontruimd na de brandmelding, remember ;-)

Zoek de verschillen

Hieronder staan twee erg op elkaar lijkende foto's van Sinterklaas (en kornuiten) op zijn boot. Zoals de titel al zegt: zoek de verschillen! Inzendingen kunnen in het Vakidiootpostvakje achtergelaten worden of gemaild worden naar `vakidioot@a-eskwadraat.nl`. Degene die de meeste verschillen vindt wint.

Voor de puzzel in de vorige Vakidioot zijn er maar liefst twee reacties binnengekomen. Winnaar is Jasper Mulder, hij mag zijn prijsje komen ophalen in de A–Eskwadraatkamer. Zijn oplossing was: 1. *bank-ven-noot*, 2. *bed-oe-ling*, 3. *een-zaam*, 4. *mu-ize-nis*, 5. *ver-stel-ziek*, 6. *wel-eer*, 7. *zak-ken-ster*.

Jan de Wit

Begin en eind

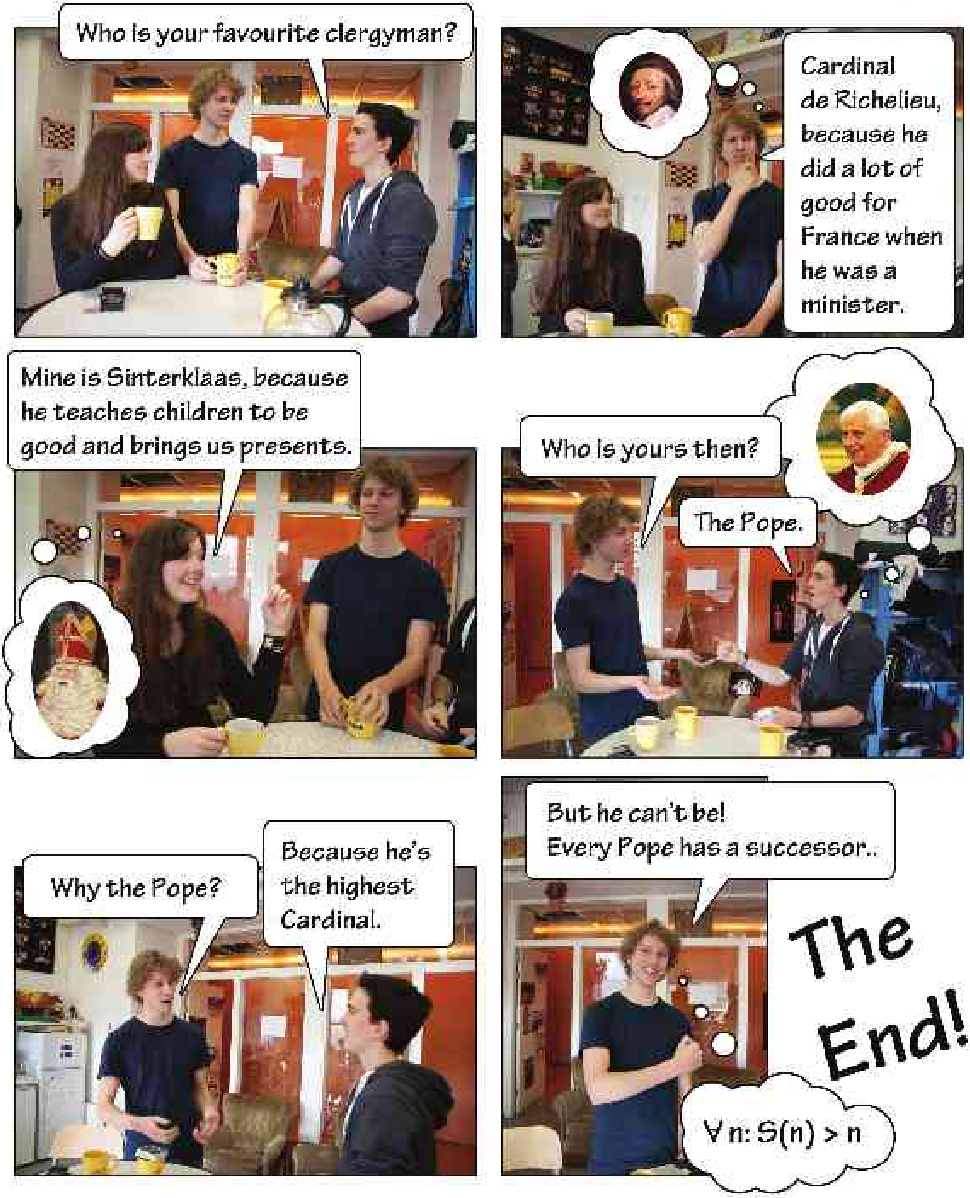
December en januari mogen dan wel dicht bij elkaar zitten, toch zijn het in sommige opzichten elkaars tegenpolen. December is de maand van vreten, cadeautjes en gezelligheid, januari de maand van (letterlijk en figuurlijk) de broekriem aanhalen. Hieronder een overzicht van mogelijke activiteiten die je kunt doen in de komende twee maanden:

December		Januari
BBCie-borrel	**1**	*Nieuwjaarsdag / Slechte kater-dag*
	2	Hertentamenweek 1 INCA/INKU
	3	
	4	Hertentamenweek 1 Wiskunde
Sinterklaas	**5**	
Sinterklaas vermist	**6**	*Iets met drie niet-echt-koningen*
	7	
Brownie day (VS)	**8**	*Dit is een zondag*
Grote ExcurCie naar Heidelberg	**9**	
Grote ExcurCie naar Heidelberg	**10**	
Grote ExcurCie naar Heidelberg	**11**	*Melkdag*
Spelletjesavond	**12**	BBCie-borrel
Open Podium / Kroegenmarathon	**13**	Kroegenmarathon
Aapjesdag	**14**	
BBCie-borrel / Owattenaait	**15**	*Dit is ook een zondag*
	16	Tentamenweek 2 Wiskunde
	17	
	18	*Dit is geen zondag*
Hertentamenweek 1 Natuurkunde	**19**	
	20	
Blanken: Maya's: wereld doet boem	**21**	*Knuffeldag*
Feest! / *Global Orgasm*	**22**	
Andere blanken: nee, vandaag pas!	**23**	*Chinezen beginnen aan het jaar 4710*
	24	
Eerste kerstdag	**25**	*National Voters' Day (India)*
Tweede kerstdag	**26**	BBCie-borrel
	27	
	28	*Data privacy day*
BBCie-borrel	**29**	
	30	Tentamenweek 2 ¬Wiskunde
Oudejaarsavond	**31**	

Het is mogelijk dat niet alle hierboven genoemde activiteiten en feestdagen ook daadwerkelijk gaan plaatsvinden. De kans dat iets als oudejaarsavond wordt afgeschaft lijkt ons echter klein.

Chun Fei Lung

De VAK idioot fotostrip



Fotografie: ViCie - Scenario: Sjoerd Boersma